



TO'G'RI BURCHAKLI UCHBURCHAKDA MEDIANALAR VA BISSEKTRISALAR KESISHGAN NUQTALARI ORASIDAGI MASOFANI TOPISH USULLARI

*Islomov S. M.
Dolliyeva D.A.
CHDPU*

Tayanch so'zlar: to'g'ri burchakli uchburchak, koordinata, mediana, bissektisa.

Ключевые слова: прямоугольный треугольник, координата, медиана, биссектриса.

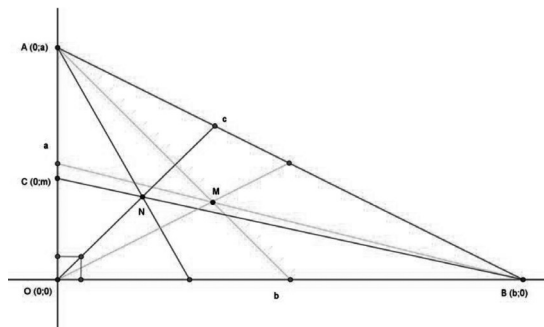
Key words: right-angled triangle, coordinate, median, bisector.

Bizga ma'lumki, elementar matematikada uchrab turadigan bir nechta geometrik masalalar odatdagidek ishlanavermaydi. Shunday geometrik masalalar borki ularni ishlash uchun o'quvchi ham geometrik tushunchalarga, ham algebraik tushunchalarga murojaat qiladi. Biz bu maqolada xuddi shunday maxsus yo'l bilan ishlanadigan bir nechta masalalarni tahlil qilamiz. Odatda o'quvchilar uchun geometrik shakllarni elementlari, uchburchakka tashqi va ichki chizilgan aylanalar markazlari orasidagi masofani topish, trapetsiyani diagonallarning o'rta chiziqdan ajratgan kesmalari orasidagi masofani topish va to'g'ri burchakli uchburchakning medianalari va bissektoralari kesishish nuqtalari orasidagi masofani topish murakkab hisoblanadi.

Biz to'g'ri burchakli uchburchakning medianalari va bissektoralari kesishgan nuqtalari orasidagi masofani topishning bir nechta usullarini ko'rib, taxlil qilib chiqamiz.

1-usul.

Dekart koordinatalar sistemasida to'g'ri burchakli uchburchakni yasab olamiz. Koordinata boshini to'g'ri burchakli uchburchakning uchi qilib belgilab olamiz ya'ni $O = (0, 0)$ nuqta qilib, y o'qidan $A = (0, a)$ nuqtani, x o'qidan esa $B = (b, 0)$ nuqtani olamiz. A va B nuqtalarni birlashtirib to'g'ri burchakli uchburchakni hosil qilamiz.



To'g'ri burchakli uchburchakning bissektrissalar kesishish nuqtasini topamiz, ixtiyoriy uchburchakda bissektrissalar kesishish nuqtasi in markazi deyiladi. Koordinata boshidan bissektrissa chiqaramiz, bissektrissa burchakni teng ikkiga bo'lganligi uchun koordinata boshidan chiqqan to'g'ri chiziq $y = x$ to'g'ri chiziq bo'ladi. B uchidan ham bissektrissa chiqaramiz u y o'qini $C = (0, m)$ nuqtada kesib o'tadi. m ni bissektrissaning asosiy xosasidan foydalanib (ixtiyoriy uchburchakda bissektrissa ajratgan kesmalar qolgan tomonlarga mos ravishda

proporsional bo'ladi) topamiz. $\frac{c}{a-m} = \frac{b}{m} \Rightarrow m = \frac{ab}{b+c}$, c - bu yerda gipotenuza. Ikki nuqta berilganda to'g'ri chiziq tenglamasini topish formulasidan keyinigi burchak bissektrissasining tenglamasini topamiz.

$$B = (b, 0), C = \left(0, \frac{ab}{b+c}\right) \Rightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \Rightarrow y = -\frac{a}{b+c}x + \frac{ab}{b+c};$$

Keyin esa bu ikki tenglamani tenglamalar sistemasi qilib kesishish nuqtasini topamiz. Ikki bissektrissani kesishish nuqtasi to'g'ri burchakli uchburchakni bissektrissalar kesishish nuqtasidir.

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\frac{a}{b+c}x + \frac{ab}{b+c} \end{cases} \Rightarrow y = y \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b+c}; y = \frac{ab}{a+b+c}$$

$$N = \left(\frac{ab}{a+b+c}, \frac{ab}{a+b+c}\right)$$

Demak bissektrissalar kesishish nuqtasining koordinatasi $N = \left(\frac{ab}{a+b+c}, \frac{ab}{a+b+c}\right)$. Endi esa to'g'ri burchakli uchburchakning medianalar kesishish nuqtasini topamiz. Ixtiyoriy uchburchakda medianalar kesishish nuqtasi og'irlik markazi deyiladi. Koordinatalari berilganda

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

uchburchakning medianalar kesishish nuqtasining koordinatasini

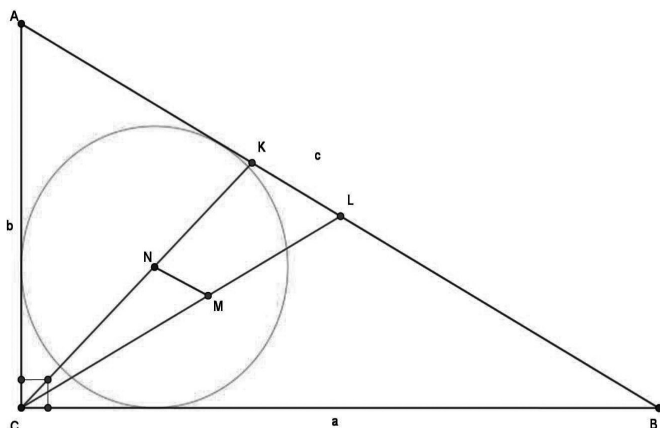
$$M = \left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

formula orqali topamiz. Bundan ekanligi kelib chiqadi. Natijada esa biz ikki nuqta berilganda ular orasidagi masofani topa olamiz.

$$\text{Ya'ni } N = \left(\frac{ab}{a+b+c}, \frac{ab}{a+b+c}\right), M = \left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}\right) \quad |MN| = \sqrt{\left(\frac{ab}{a+b+c} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{ab}{a+b+c} - \frac{a}{3}\right)^2}$$

2-usul.

To'g'ri burchakli uchburchakda bissektrissalar kesishish nuqtasi va medianalar kesishish nuqtasi orasidagi masofani topish hamda uni gipotenuza va uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusiga bog'liqligi. Bu yerda biz kosinuslar teoremasidan foydalanib ular orasidagi masofani topamiz. Avval tekislikda $\square ABC$ -to'g'ri burchakli uchburchakni yasab olamiz. C -uchi to'g'ri burchak, AB gipotenuzadan K, L nuqtalarni olamiz (CK - bissektrissa, CL - mediana), M - medianalar kesishish nuqtasi, N - bissektrissalar kesishish nuqtasi, $\angle KCL = \angle NCM = \alpha$.



$$AB = c, CB = a, CA = b, CN = r\sqrt{2}, CM = \frac{c}{3}, CK = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}, AL = LB = CL = \frac{c}{2}$$

Bissektrissaning asosiy xossasidan foydalanib AK va KB ni topamiz:

$$\frac{CA}{AK} = \frac{CB}{KB}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c - AK}{AK} \Rightarrow AK = \frac{bc}{a+b}, \quad KL = AL - AK = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a+b} = \frac{(a-b)c}{(a+b)2}$$

$\square CMN$ va $\square CKL$ uchburchaklar uchun kosinuslar teoremasini qo'llaymiz.

$$MN^2 = CN^2 + CM^2 - 2CN \cdot CM \cdot \cos \alpha$$

$$KL^2 = CK^2 + CL^2 - 2CK \cdot CL \cdot \cos \alpha \quad \text{bu yerdan kosinuslarni tenglab yuboramiz.}$$

$$\cos \alpha = \frac{CN^2 + CM^2 - MN^2}{2 \cdot CN \cdot CM} = \frac{CK^2 + CL^2 - KL^2}{2 \cdot CK \cdot CL}; \quad \frac{(r\sqrt{2})^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 - MN^2}{r\sqrt{2} \cdot \frac{c}{3}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{(a-b)^2 c^2}{4(a+b)^2}}{\frac{\sqrt{2}ab \cdot c}{a+b} \cdot \frac{c}{2}}$$

$$\frac{2r^2 + \frac{c^2}{9} - MN^2}{\frac{r}{3}} = \frac{8a^2b^2 + 4abc^2}{4(a+b)^2} \cdot \frac{2(a+b)}{ab}; \quad \frac{2r^2 + \frac{c^2}{9} - MN^2}{\frac{r}{3}} = \frac{2ab + c^2}{a+b} \cdot 2$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

To'g'ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi $r = \frac{a+b-c}{2}$ ekanligidan $a+b = 2r+c$ ekanligini va buni kvadratga oshirib:

$$(a+b)^2 = (2r+c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 4r^2 + 4rc + c^2, \{a^2 + b^2 = c^2\} \Rightarrow ab = 2r \cdot (r+c) \quad \text{ni}$$

topib olamiz.



$$\frac{2r^2 + \frac{c^2}{9} - MN^2}{\frac{r}{3}} = \frac{4r(r+c) + c^2}{2r+c} \cdot 2 \Rightarrow \frac{2r^2 + \frac{c^2}{9} - MN^2}{\frac{r}{3}} = \frac{(2r+c)^2}{2r+c} \cdot 2 \Rightarrow$$
$$2r^2 + \frac{c^2}{9} - MN^2 = \frac{4r^2}{3} + \frac{2cr}{3} \Rightarrow MN^2 = \frac{6r^2 - 6cr + c^2}{9} \Rightarrow |MN| = \sqrt{\frac{6r^2 - 6cr + c^2}{9}}.$$

Xulosa. Yuqoridagi masaladan ko‘rinib turibdiki, to‘g‘ri burchakli uchburchakka oid misollarni yechish uchun, avvalo, uning chizmasini tasavvur qilish kerak va shunga mos grafikni yasash kerak. Bunda, albatta, tasavvur muhim ahamiyat kasb etadi.

Adabiyotlar:

1. М.И. Сканави “Сборник задач по математике” Ташкент-1975. стр 166
2. А. Г. Мякишев “Элементы геометрии треугольника” Москва.- Издательство Московского центра непрерывного математического образования. М.:2002.
3. С. Н. Федин, Е. Д. Куланин Избранные задачи по геометрии. Треугольник Москва. Издательство Илекса 2016.

РЕЗЮМЕ

Maqolada to‘g‘ri burchakli uchburchaklarda medianalar va bessiktrisalarning kesishgan nuqtalari orasidagi masofani topishning yo‘llari ko‘rsatilgan.

РЕЗЮМЕ

В статье показаны способы нахождения расстояния между точками пересечения медиан и биссектрис в прямоугольных треугольниках.

SUMMARY

The article shows ways to find the distance between the intersection points of medians and bisectors in right triangles.