



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КОМПЕТЕНТНОСТИ И ВЗАИМОСВЯЗЬ АНАЛИЗА, СИНТЕЗА, СРАВНЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ МЫШЛЕНИЯ

Сиддиков З.Х.

доцент, д.ф.н.н.(PhD) при ФерГУ

Tayanch so'zlar: matematik tushunchalarning tahlili, sintezi, taqqoslashlari, xossalari, analitik-sintetik usul, psixologik tadqiqot, matematik kompetensiyalar.

Ключевые слова: анализ, синтез, сравнения, свойств математических понятий, аналитико-синтетический метод, психологические исследования, математические компетентности.

Key words: analysis, synthesis, comparisons, properties of mathematical concepts, analytical-synthetic method, psychological research, mathematical competencies.

Методы научного исследования - анализ и синтез в математических исследованиях играют особенно важную роль. Столь же велика их роль и в обучении математике, в котором они выступают в самых разнообразных формах: как методы решения задач, доказательства теорем, изучения свойств математических понятий и т. д. [2].

Анализ и синтез практически неотделимы друг от друга, они сопутствуют друг другу, дополняя друг друга, составляя единый аналитико-синтетический метод. Так, например, при помощи анализа сложная задача расчленяется на ряд простых задач, а затем посредством синтеза происходит соединение решений этих простых задач в единое целое [4].

В первоначальном понимании анализ рассматривался как путь (метод мышления) от целого к частям этого целого, а синтез – как путь (метод мышления) от частей к целому.

Примером применения анализа и синтеза, понимаемых в этом смысле, может служить обычная бытовая ситуация: ребенок, «разбирающий» игрушку, проводит своеобразный анализ (ему интересно, как она устроена); ребенок, собирающий игрушку из ее частей, проводит своеобразный синтез.

Анализ и синтез в этом отношении встречаются и в настоящее время в некоторых экспериментальных науках, например в химии (реакция разложения, реакции соединения химических элементов).

В дальнейшем анализ стали понимать как прием мышления, при котором от следствия переходят к причине, породившей это следствие, а синтез - как прием мышления, при котором от причины переходят к следствию, порожденному этой причиной.

Рене Декарт (1596-1650) в книге «Логика» детально исследовал этот смысл анализа и синтеза; при изложении сущности этих методов Р. Декарт весьма наглядно проиллюстрировал оба метода на следующем примере.

«Поставим вопрос, - писал Р. Декарт, - родственник ли я королю Карлу Великому? К ответу этот вопрос можно прийти двумя путями. Можно «идти по родословному дереву» в прошлое от меня до Карла Великого; также можно «идти по родословному дереву» из прошлого: от К.Великого до меня, - говорит Р. Декарт. – Если мы окажемся на одном родословном дереве, то мы - родственники».

Первый способ решения этой задачи иллюстрирует, что такое анализ, а второй – синтез.

Примером применения анализа и синтеза, понимаемых в этом смысле, могут служить арифметический и алгебраический методы решения текстовой задачи; первый из них иллюстрирует синтез, второй иллюстрирует анализ (Маше и Тане 12 лет. Тане – 5 лет. Сколько лет Маше?

- 1) $12-5=7$ – решение, основанное на синтезе;
- 2) $x+5=12 \Rightarrow x=12-5 \Rightarrow x=7$ - решение, основанное на анализе).

И наконец, анализ (аналитический) понимают как метод исследования, основу которого составляет количественное изучение свойств объекта, опирающееся на понятие числа и меры, а синтез (синтетический) – как метод исследования, основу которого составляет изучение качественных свойств объекта.

В определенной степени этому пониманию анализа и синтеза отвечают такие научные дисциплины, как аналитическая геометрия и синтетическая геометрия.

В процессе преподавания математики анализ и синтез обычно выступают в смысле, соответствующем второй стадии их понимания.

Выше мы рассмотрели анализ и синтез как методы научного исследования и частично – как методы изучения учебного материала. Анализ и синтез выступают еще и как особые формы процесса мышления. С точки зрения психологии «Процесс мышления – это прежде всего анализирование и синтезирование того, что выделяется анализом; это затем абстракция и обобщение, являющиеся производными от них» [3]. Психологи утверждают, что закономерности, присущие этим процессам, в их взаимоотношении друг с другом, представляют собой основные закономерности мышления.

Многочисленные психологические исследования показали, что анализ выступает в различных формах, например:

- 1) Анализ типа «фильтр»;
- 2) Анализ через синтез.

В случае *анализа типа «фильтр»* человек, решающий задачу, действует без всякой видимой системы; он просто наугад хаотически ищет способы решения данной задачи, пробует применить один способ за другим и отсеивает неоправдавшие себя пробы.

Было сделано предположение о том, что такие пробные действия есть своеобразная форма анализа. Иными словами, любая проба, которая хотя и не приводит непосредственно к успеху, тем не менее подготавливает представление о первом пути решения. Это предположение нашло подтверждение в исследованиях психологов. Особенно ярко полезность пробных действий проявилась при исследовании процесса решения задач-головоломок, которые требовали от решающего способности проявить догадку. Исследования показали, что догадка опирается на анализ, с помощью которого и преодолеваются искусственно созданные условия задачи трудности. Приводится такой пример: требуется из 6 спичек сложить 4 равносторонних треугольника. Головоломкой эта задача является потому, что условие ее наталкивает решающего на мысль о том, что искомая фигура должна быть построена на плоскости, в то время как правильное направление поиска решения этой задачи состоит в том, чтобы построить треугольники в пространстве (построить тетраэдр). Сначала решающий задачу прибегает к различным пробам решения задачи на плоскости, затем «внезапно» возникает догадка о возможности выхода в трехмерное пространство.



Рассмотрим еще один пример. На одном из занятий математического кружка учащимся VII класса была предложена такая задача:

«Поверхность пруда постепенно зарастает ряской. Площадь поверхности, занимаемая ряской, с каждым днем увеличивается в два раза. Весь пруд зарастает ряской в течение 100 дней. За сколько дней зарастет ряской половина поверхности пруда?»

Учащиеся долго не могли найти правильного ответа на вопрос задачи, делали всевозможные предложения (чаще всего ответ давался такой – половина поверхности пруда зарастет ряской на 50 дней). Один из учащихся все же сумел решить задачу. На вопрос учителя о том, каким образом он сумел решить эту задачу, школьник ответил, что на верное решение его натолкнуло само условие задачи: «в условии задачи сказано, что площадь поверхности пруда, занимаемая ряской, увеличивается с каждым днем в 2 раза. Если весь пруд зарастает за 100 дней, то половина его – за 99 дней».

Проведенный им содержательный анализ условия задачи подготовил, казалось бы, внезапное ее решение.

Правда, следует отметить, что верная догадка возникает не только в случае решения задачи путем проб, но и в результате применения других методов.

Рассмотрим теперь вторую форму анализа – Эта особая форма анализа является ведущим звеном всей и всякой мыслительной деятельности. Поэтому рассмотрим этот компонент мыслительного процесса более детально.

С.Л.Рубинштейн пишет: «Говоря кратко и потому обще, грубо, эта *основная форма* анализа, основной нерв процесса мышления заключается в следующем: *объект в процессе мышления включается во все новые связи и в силу этого выступает во все новых качествах, которые фиксируются в новых понятиях; из объекта, таким образом, как бы вычерпывается все новое содержание; он как бы поворачивается каждый раз другой своей стороной, в нем выявляются все новые свойства»* [3].

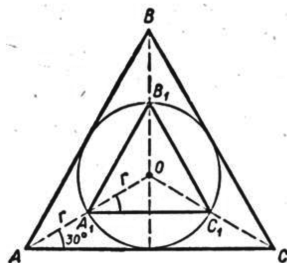
Чтобы понять, в чем заключается это важное звено мыслительного процесса, приведем следующий пример.

Пример. Доказать, что периметр равностороннего треугольника, описанного около окружности, вдвое больше периметра равностороннего треугольника, вписанного в эту же окружность (эта задача давалась на одном из занятий математического кружка в 8 классе).

Решение. 1) Рассматривается $\triangle AOC$ и доказывается, что $[A_1C_1]$ является средней линией этого треугольника, т.е. $|A_1C_1| = \frac{1}{2}|AC|$.

2) Аналогично, доказывается, что: $|A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|$; $|C_1B_1| = \frac{1}{2}|CB|$.

Рис. 1



3) Из (1) и (2) пунктов следует: $\frac{1}{2}P_{\triangle ABC} = P_{\triangle A_1B_1C_1}$.



В ходе решения задачи школьник анализирует свойства прямой A_1C_1 данной в условии задачи (прямой A_1C_1 принадлежит сторона $\Delta A_1B_1C_1$), и выделяет одно из них: (A_1C_1) параллельна (AC).

Затем эту же сторону треугольника $[A_1C_1]$ он рассматривает как среднюю линию ΔAOC и выделяет новое свойство ее: $|A_1C_1| = \frac{1}{2}|AC|$.

Далее A_1C_1 выступает уже не как прямая, параллельная (AC), и не как средняя линия треугольник ΔAOC , а в качестве стороны треугольника $\Delta A_1B_1C_1$.

Таким образом, каждый раз одна и та же сторона треугольника включается решающим задачу в новую систему связей, и в ней каждый раз выступает, вычленяется новое свойство данного отрезка прямой (то как средней линии, то как стороны треугольника). Все эти свойства $[A_1C_1]$, выделенные таким образом, соотносятся друг с другом и только это соотношение дает решение задачи.

Анализ через синтез – это познание новых сторон, качеств и свойств изучаемых объектов путем включения этих объектов в систему связей и отношений, в которых эти новые свойства могут быть обнаружены. Иногда включение объекта в неожиданную систему связей кажется весьма удивительным и даже смешным. В жизненных ситуациях это явление часто выражается в форме остроумия, парадоксов, шуток.

В понятие «синтез» психологи вкладывают следующее содержание: «синтезом является всякое соотношение, сопоставление, всякое установление связи между различными элементами» [3].

В мыслительном процессе синтез непрерывно переходит в анализ и наоборот. Вообще говоря, в познании нет двух изолированных путей, из которых один представлял бы собой синтез, а другой – анализ. Единство их отчетливо выступает в сравнении. *Сравнение* можно охарактеризовать как анализ, который проходит посредством синтеза и ведет к некоторому обобщению, к новому синтезу. Например, при доказательстве конгруэнтности двух данных треугольников мы вначале вычленяем соответственные элементы треугольников, т.е. рассматриваем их углы, стороны – проводим анализ, а затем делаем заключение о конгруэнтности соответственных углов и сторон – проводим синтез. На основе полученных заключений делается общий вывод о том, конгруэнтны или нет эти треугольники – проводится новый синтез.

Мы видим, что сравнение начинается с соотношения или сопоставления явлений, т.е. с синтетического акта. Посредством этого синтетического акта производится анализ сравниваемых явлений - выделение в них общего и различного; выступающее в результате анализа общее, в свою очередь, объединяет, т.е. синтезирует обобщаемые явления,

Сравнение – это та конкретная форма взаимосвязи синтеза и анализа, посредством которой осуществляется эмпирическое обобщение и классификация явлений. Роль сравнение особенно велика на уровне эмпирического познания, на начальных его ступенях, в частности у ребенка.

**Литература:**

1. Оганесян В.А. и др. Методика преподавания математики в школе. Общая методика. М. Просвещение. 1980.
2. Усаров А.Ж. и др. Методика преподавания математики. Общая методика. Учебное пособие. Т. САННОФ. 2021.
3. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. М. 1958.
4. Махмудова Д.М. и др. Методика преподавания математики. Учебник. Т. – 2022.

РЕЗИЮМЕ

Maqolada matematik kompetensiyalar, fikrlash jarayonida tahlil, sintez va taqqoslash o'rtasidagi bog'liqlik ko'rsatilgan.

РЕЗИЮМЕ

В статье излагается математические компетентности взаимосвязь анализа, синтеза и сравнения в процессе мышления.

SUMMARY

The article outlines mathematical competences, the relationship between analysis, synthesis and comparison in the thinking process.