



## CHEGARALARI CHEKSIZ XOSMAS INTEGRALLARNING YAQINLASHUVCHANLIGI

*Bektosheva Sh.A.  
Mustaqil izlanuvchi*

**Tayanch soʻzlar:** xosmas integrallar, singularlik, integrand (integrallangan funksiya), integrallarning yaqinlashuvchanligi, limit.

**Ключевые слова:** несобственные интегралы, особенность, подынтегральная функция (интегральная функция), сходимость интегралов, предел.

**Key words:** improper integrals, singularity, integrand (integrated function), convergence of integrals, limit.

Xosmas integrallar — bu chegaralari cheksiz boʻlgan yoki integrallanish oraliqʻida singularlik (cheksizlik) nuqtalari mavjud boʻlgan integrallar. Bunday integrallarni toʻgʻri aniqlash va ularning mavjudligini tekshirish, yaʼni yaqinlashuvchanlik shartlarini oʻrganish matematikaning muhim boʻlimlaridan biridir. Xosmas integrallar matematik fizika, ehtimollar nazariyasi, statistikada va koʻplab boshqa sohalarda qoʻllaniladi. Xosmas integrallar tushunchasi dastlab klassik matematiklarda, ayniqsa, integral hisoblashda vujudga kelgan. Ammo koʻpgina holatlarda integrallarning sonli qiymatlari aniq boʻlmay, ular “cheksiz” yoki “xosmas” boʻlib qolishi mumkin.

Xosmas integrallar bir yoki ikkita cheksiz chegaraga ega boʻlgan integrallar boʻlib, quyidagi koʻrinishga ega:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ yoki } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Bu yerda integrallarning qiymati integrand (integrallangan funksiya)ning xulq-atvoriga bogʻliq. Xususan, funksiyaning cheksiz uzoqlashgan sohalardagi chegaralari ularning yaqinlashuvchan yoki yaqinlashmaydiganligini aniqlaydi.

1. Xosmas integrallarning yaqinlashuvchanligi:

Xosmas integralning yaqinlashuvchanligini tekshirish uchun quyidagi asoslarga eʼtibor qaratiladi:

1. Integrandning chegara xatti-harakati: Funksiya  $f(x)$  ning  $(x) \rightarrow \infty$  va  $(x) \rightarrow -\infty$  da qanday xulq-atvor koʻrsatishi integrallarni yaqinlashuvchanligini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Masalan, agar  $f(x)$  ning cheksiz sohalardagi xulq-atvori juda tez kamayuvchi boʻlsa (masalan, eksponensial yoki kuchli asimptotik funksiyalar kabi), integral yaqinlashuvchan boʻlishi mumkin.

2. Xosmas integrallarning boʻlinishi: Chegaralari cheksiz boʻlgan xosmas integralni boʻlib hisoblash ham yaqinlashuvchanlikni tekshirishda yordam beradi. Masalan,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  integralini  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$  koʻrinishida boʻlish mumkin. Agar har ikkala integral yaqinlashsa, u holda asosiy xosmas integral ham yaqinlashadi.

3. Qiyoslash teoremasi (Comparison Test): Agar  $f(x)$  ning kattaligi  $g(x)$  ning kattaligidan kichik yoki teng boʻlsa va  $g(x)$  ning integrali yaqinlasha oladigan boʻlsa, unda  $f(x)$  integral ham



yaqinlashadi. Qiyoslash usuli ko‘pincha ma’lum yaqinlashuvchi integrallarni qiyoslash uchun ishlatiladi.

2. Xosmas integrallarning yaqinlashish shartlari:

2.1. Bir tomonlama xosmas integrallar

Agar xosmas integralning bir chegarasi cheksiz bo‘lsa, masalan,  $\int_a^\infty f(x)dx$ , uni yaqinlashuvchanligini quyidagicha tekshirish mumkin:

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Agar limit mavjud bo‘lsa va u chekli son bo‘lsa, unda integral yaqinlashadi. Agar limit cheksiz bo‘lsa yoki mavjud bo‘lmasa, integral yaqinlashmaydi.

Misol:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{x}{-1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{b} + b \right) = 1$$

Bu yerda integral yaqinlashadi va uning qiymati 1 ga teng.

2.2. Ikkala tomondan cheksiz xosmas integrallar

Agar ikkala cheksiz chegaraga ega bo‘lgan integralni ko‘rib chiqsak, masalan,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

bu integralni bo‘laklarga ajratish orqali tekshirishimiz mumkin:

$$I = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$$

Agar har ikkala integral yaqinlashsa, asosiy integral ham yaqinlashadi.

Misol:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$$

Bu integral Gauss integrali bo‘lib, uning qiymati quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

3. Amaliy misollar va yaqinlashuvchanlikni tekshirish

Misol 1:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

Bu integralning yaqinlashuvchanligi  $p$  ning qiymatiga bog‘liq:

Agar  $p > 1$  bo‘lsa, integral yaqinlashadi.

Agar  $p \leq 1$  bo‘lsa, integral yaqinlashmaydi.

Misol 2:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Bu mashhur Dirixle integrali bo‘lib, u yaqinlashadi va uning qiymati quyidagicha:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Chegaralari cheksiz bo‘lgan xosmas integrallarni tahlil qilishda integrallash oraliqidagi funksiyaning xatti-harakatini aniqlash va ularning o‘shish tezligiga qarab yaqinlashuv yoki davrashuv holatlarini aniqlash muhim ahamiyat kasb etadi. Shuningdek, integralning mavjudligi va yaqinlashuvchanligi cheksizlik atrofidagi nuqtalardagi funksiya qiymatlarining o‘zgarishiga bog‘liq ekanligi ko‘rsatildi. Yaqinlashuvchanlikni aniqlash usullari, masalan, qo‘pol taqqoslash va funksiya o‘shish tezligini baholash orqali ko‘plab matematik masalalarni hal qilishda samarali natijalarga erishiladi.



Xosmas integrallarni hisoblash va ularning yaqinlashuvchanligini tekshirish matematik fizika, ehtimollar nazariyasi, iqtisodiyot va boshqa ko'plab fanlarda amaliy muhim ahamiyatga ega. Shu sababli, bunday integrallarni to'g'ri tushunish va tahlil qilish muhimdir.

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak, chegaralari cheksiz bo'lgan xosmas integrallar matematik analizda keng o'rganilgan va ko'plab real hayotdagi masalalarda qo'llaniladi. Asosan, integrallarning yaqinlashuvchanligi integrandning cheksiz qiymatlardagi xulq-atvoriga bog'liq. Yaxshi aniqlangan testlar va usullar orqali biz xosmas integrallarning yaqinlashishini tahlil qilishimiz mumkin.

#### Adabiyotlar:

1. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Funksiyalar nazariyasi, T.: "O'AJBNT" markazi, 2004 y. 148 b.
2. Sa'dullaev A. va boshq. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami, III qism. T.: «O'zbekiston», 2000 y., 400 b.
3. Apostol, T. M. (1974). Mathematical Analysis. Addison-Wesley Publishing Company.
4. Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill Education.
5. Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2005). Mathematical Methods for Physicists. Elsevier.
6. <https://www.pedagog.uz/>
7. <https://www.ZiyoNet.uz/>

#### РЕЗЮМЕ

Xosmas integrallar va ularning yaqinlashuvchanligi matematik analizda muhim o'rin tutadi. Ushbu maqolada chegara qiymatlari cheksiz bo'lgan xosmas integrallar va ularning yaqinlashuvchanligi masalasi ko'rib chiqildi. Chegaralari cheksiz bo'lgan xosmas integrallarni tahlil qilishda integrallash oralig'idagi funksiyaning xatti-harakatini aniqlash va ularning o'sish tezligiga qarab yaqinlashuv yoki davrashuv holatlarini aniqlash muhim ahamiyat kasb etadi.

#### РЕЗЮМЕ

Несобственные интегралы и их аппроксимация занимают важное место в математическом анализе. В данной статье рассматривалась задача о сингулярных интегралах с бесконечными граничными значениями и их аппроксимации. При анализе собственных интегралов с бесконечными границами важно определить поведение функции на интервале интегрирования и определить случаи сходимости или расходимости в зависимости от скорости их роста.

#### SUMMARY

Improper integrals and their approximation occupy an important place in mathematical analysis. In this article, the problem of singular integrals with infinite boundary values and their approximation was considered. In the analysis of eigenintegrals with infinite boundaries, it is important to determine the behavior of the function in the interval of integration and to determine the cases of convergence or convergence depending on their growth rate.