



BIR NECHA O'ZGARUVCHILI BUTUN SONLARDA YECHILADIGAN HAR XIL TENGLAMALAR HAQIDA

Axmedova G.A.

Tayanch so'zlar: aniqmas tenglama, echim, qiymat, chegara, qoldiq, nomanfiy, ildiz.

Ключевые слова: неопределённое уравнение, решение, значение, предел, остаток, минус, корень.

Key words: indeterminate equation, solution, value, limit, remainder, negative, root.

Резюме:

Ushbu maqolada bir necha o'zgaruvchili butun sonlarda echiladigan tenglamalarni echishdan namunalar keltirilgan. Bu tenglamalarni echish uchun alohida usullar mavjud bo'lmaganligi uchun ularni echish hammaga qiziqroq masalalardan hisoblanadi.

Резюме:

В этой статье приведены примеры решения целочисленных уравнений с несколькими переменными. Поскольку специальных методов решения этих уравнений не существует, их решение является одной из самых интересных задач для каждого.

Summary:

This article provides examples of solving integer equations with several variables. Since there are no special methods for solving these equations, solving them is one of the most interesting problems for everyone.

Bittadan ortiq noma'lumlarni o'z ichiga oluvchi tenglama aniqmas tenglama deyiladi. Noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo'lgan tenglamalar sistemasini aniqmas tenglamalar sistemasini deyiladi. Aniqmas tenglama cheksiz ko'p echimga ega. Odatda aniqmas tenglamalarni butun sonlardagi echimlari qaraladi. Darajasi ikkidandan katta bo'lgan ikki va uch o'zgaruvchili har xil tipdagi tenglamalarni butun sonlarda echishni ko'rib o'tamiz.

1-misol. Ushbu $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$ tenglamani eching.

Yechish. Tenglamani quyidagicha shakl almashtiramiz.

$$5x^2 + (y^2 - 2yz + z^2) + 2z^2 = 30,$$

$$5x^2 + (y - z)^2 + 2z^2 = 30$$

Oxirgi tenglamadan ko'rinib turibdiki, har bir o'zgaruvchi modulidan katta bo'lmagan qiymatlarni qabul qiladi. x ning chegarasini aniqlaymiz

$$5x^2 \leq 30, \quad x^2 \leq 6, \quad |x| \leq 2, \quad -2 \leq x \leq 2$$

Avval x ning manfiy bo'lmagan qiymatlarini olamiz. U holda $0 \leq x \leq 2$.

1) $x = 0$ bo'lsin. U holda tenglama

$$(y - z)^2 + 2z^2 = 30$$



ko'rinishini oladi. Endi z ning chegarasini aniqlaymiz.

$$2z^2 \leq 30, \quad z^2 \leq 15, \quad |z| \leq 3.$$

Agar $z^2 = 0, 1, 4, 9$ bo'lsa oxirgi tenglamadan

$$(y - z)^2 = 30, 28, 22, 12$$

bo'ladi. Bu 4 ta holda butun sonlarda echim mavjud emas.

2) $x = 1$ bo'lsin.

$$5 + (y - z)^2 + 2z^2 = 30,$$

$$(y - z)^2 + 2z^2 = 25$$

Bunda $z = 0$ da $y \pm 5$ bo'ladi.

3) $x = 2$ bo'lsin. U holda

$$20 + (y - z)^2 + 2z^2 = 30,$$

$$(y - z)^2 + 2z^2 = 10$$

Bu oxirgi tenglama ham butun sonlarda echimga ega emas. $x = -1$ da ham y va z ning qiymatlari $x = 1$ dagi singari bo'ladi.

$$\text{Javob: } (1; 5; 0), (1; -5; 0), (-1; 5; 0), (-1; -5; 0).$$

2-misol. Ushbu $x^3 + y^3 = 9z + 5$ tenglama butun sonlarda echimga egami?

Yechish. Butun sonning kubini 9 ga bo'lsak qoldiqda 0, 1 yoki 8 hosil bo'ladi. Natijada 2 ta kublar yig'indisini 9 ga bo'lsak, 5 qoldiq qolmaydi. Bu tenglama butun sonlarda echimga ega emas.

3-misol. Shunday natural p va q larni topingki, $x^2 + pqx + p + q = 0$ tenglama faqat butun ildizlarga ega bo'lsin.

Yechish. Tenglamaning butun ildizlarini x_1 va x_2 bilan belgilaylik. Viyet teoremasiga ko'ra

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = pq \\ x_1 x_2 = p + q \end{cases}$$

p va q lar natural sonlar bo'lganligi uchun sistemadan x_1 va x_2 lar ham natural sonlar bo'ladi. Sistemani echish uchun birinchi tenglamadan ikkinchisini ayiramiz

$$x_1 + x_2 - x_1 x_2 = pq - p - q$$

$$(x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 1) + 2 = pq - p - q + 1$$

$$(x_1 - 1)(1 - x_2) + 2 = (p - 1)(q - 1)$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (p - 1)(q - 1) = 2$$

Bu oxirgi tenglamani qaraylik. Ikkita butun manfiy bo'lmagan sonlar yig'indisi 2 ga quyidagi 3 ta holda teng bo'lishi uchun

$$\begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2 \\ (p - 1)(q - 1) = 0 \end{cases}, \begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1 \\ (p - 1)(q - 1) = 1 \end{cases}, \begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0 \\ (p - 1)(q - 1) = 2 \end{cases}$$

Birinchi sistemani echamiz.

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}, \text{ yoki } \begin{cases} x_1 - 1 = 2 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Dastlabki $\begin{cases} x_1 + x_2 = pq \\ x_1 x_2 = p + q \end{cases}$ sistemadan $p = 1$ bo'lsa $q = 5$ bo'ladi. Agar $q = 1$ bo'lsa

$p = 5$ bo'radi. Qolgan sistemalar ham shunday echiladi va javob olinadi.

$$\text{Javob: } p = 1, q = 5; p = 5, q = 1; p = q = 2; p = 2, q = 3; p = 3, q = 2$$

4-misol. $3^x - 5 = 4y$ tenglamani butun sonlarda eching.

Yechish. Birinchi navbatda x manfiy bo'lmashligi kerak, aks holda 3^x daraja kasrga aylanadi. x ning qanday butun nomanfiy qiymatlarida $3^x - 5$ ayirma 4 ga bo'linadi degan savolga javob beramiz. Tanlash yo'li bilan $3^x - 5$ ifoda 4 ga $x = 0, 2, 4$ larda bo'linishi, $x = 1, 3, 5$ larda esa bo'linmasligi kelib chiqadi. Demak, 2 ta x juft va x toq bo'lgan hollarni qaraymiz.

1) x juft bo'lsin $x = 2n$, n butun nomanfiy son.

$$3^x - 5 = 3^{2n} - 5 = (3^{2n} - 1) - 4$$

$3^{2n} - 1$ ayirma 4 ga bo'linadi. Shuning uchun oxirgi tenglikning o'ng tomoni 4 ga bo'linadi. Endi y ni topamiz.

$$y = \frac{1}{4}(3^x - 5) = \frac{1}{4}(3^{2n} - 5)$$

2) x toq bo'lsin. $x = 2n + 1$, n butun manfiy bo'lmagan son.

$$3^x - 5 = 3^{2n+1} - 5 = 3 \cdot 3^{2n} - 5 = (3(3^{2n} - 1) + 1) - 5 = 3(3^{2n} - 1) - 2$$

Oxirgi ayirma biror bir n ning butun nomanfiy qiymatida 4 ga bo'linmaydi. Demak, bu holda tenglama butun sonlarda echimga ega emas.

$$\text{Javob: } (2n; \frac{1}{4}(3^{2n} - 5)), n \text{ ixtiyoriy butun nomanfiy son.}$$

5-misol. Ushbu

$$\text{arctg} \frac{1}{x} + \text{arctg} \frac{1}{y} = \text{arctg} \frac{1}{2}$$

tenglamani butun echimlarini toping.

Yechish. Tenglikning har ikki tomonini tangenslaymiz.

$$\text{tg} \left(\text{arctg} \frac{1}{x} + \text{arctg} \frac{1}{y} \right) = \text{tg} \left(\text{arctg} \frac{1}{2} \right)$$

Tenglikning chap qismiga 2 ta argument yig'indisining tangensi formulasini qo'llaymiz.

$$\frac{\text{tg} \left(\text{arctg} \frac{1}{x} \right) + \text{tg} \left(\text{arctg} \frac{1}{y} \right)}{1 - \text{tg} \left(\text{arctg} \frac{1}{x} \right) \cdot \text{tg} \left(\text{arctg} \frac{1}{y} \right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{x+y}{xy-1} = \frac{1}{2}, \quad 2x+2y = xy-1, \quad 2x+1 = xy-2y,$$

$$y = \frac{2x+1}{x-2} = \frac{(2x-4)+5}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$$

$x - 2$ ayirma faqat 1, 5, -1, -5 qiymatlarni qabul qiladi. Bu 4 ta holni ko'rib o'tamiz. Natijada $(3; 7), (7; 3), (1; -3), (-3; 1)$ juftliklarni hosil qilamiz. Endi tekshirib ko'rishimiz kerak. Ikkita



argumentning tangenslari teng bo'lsa, bu argumentlar teng bo'lmasligi mumkin. Bizning misolimizda bunday hol bo'lmaydi. Masalan, $x = 3, y = 7$ bo'lsa, $\arctg \frac{1}{3}$ va $\arctg \frac{1}{7}$ birinchi chorakka tegishli bo'ladi, ikkita bunday burchaklar yig'indisi ikkinchi va uchinchi chorakka tegishli bo'lmaydi. Natijada u birinchi chorak burchagi bo'ladi va $\arctg \frac{1}{2}$ ga teng bo'ladi

Javob: $(3;7), (7;3), (1;-3), (-3;1)$

Adabiyotlar:

1. Олехник С.Н.и др.Уравнения и неравенства. Нестандартные решения. 10-11 классы. Учебно-метод. пособие. Москва. 2001.
2. О.А.Иванов. "Практикум по элементарной математике" Алгебро-аналитические методы. Мцнмо 2001.
3. И.Ф.Шарыгин, В.И.Голубев. Факультативный курс по математике. Москва.Просвещение.1991.
4. В.В.Вавилов,Н.И.Мельников,С.Н.Олехник,Пасиченко П.Н. Задачи по математике. Алгебра. Справочной пособие. Москва. Наука.1987г.