



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКИПАЖА НА БАЛЛОННЫХ КОЛЕСАХ ПРИ ЕГО МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЯХ ОТ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Маматкабилов А.Х.

ТерГУ, старший преподаватель (PhD)

Haitov Ya.A., Jomg'irova N.A. студенты ТерГУ

Tayanch so'zlar: matematik model, raqamli algoritm, transport vositalari, kompyuter texnologiyasi, aylanish nazariyasi, harakat barqarorligi, hisoblash tajribasi

Ключевые слова: математическая модель, численный алгоритм, транспортных средств, компьютерных технологий, теории качения, устойчивости движения, вычислительный эксперимент.

Key words: mathematical model, numerical algorithm, vehicles, computer technology, rolling theory, stability of movement, computational experiment.

Резюме:

Maqolada avtomobilning ma'lum parametrlarining uning dinamikasiga (xususan, harakat barqarorligiga) ta'sirini tahlil qilish qobiliyatini ta'minlashi kerak bo'lgan modellashtirish chuqurligini aniqlashning avtomatizatsiyasi keltirilgan. Avtomobil parametrlarining o'zgarishi diapazonlari (ularning soni bir necha yuzga etishi mumkin) kichik intervallarga bo'linadi, ular uchun modelni izchil soddalashtirish bilan hisoblash tajribasi o'tkaziladi. Keyin, har bir interval uchun tanib olish usullari eng muhim parametrlarni tanlaydi, ular asosida murakkab boshlang'ich modelning mos keladigan parametr qiymatlari to'plami uchun soddalashtirilgan avtomobil modeli avtomatik ravishda quriladi.

Резюме:

В статье приведены автоматизация определения глубины моделирования должна обеспечить возможность проведения анализа влияния тех или иных параметров автомобиля, на его динамику (в частности, на устойчивости движения). Диапазоны изменения параметров автомобиля (число которых может достигать нескольких сот) разбиваются на небольшие интервалы, для которых проводится вычислительный эксперимент при последовательном упрощении модели. Затем для каждого интервала методами распознавания выделяются наиболее значимые параметры, на основе чего автоматически строится упрощенная модель автомобиля для соответствующего набора значений параметров сложной исходной модели.

Summary:

The article presents the automation of the definition of the modeling depth should provide the ability to analyze the influence of certain parameters of the car on its dynamics (in particular, on the stability of movement). The ranges of change of the parameters of the car (the number

of which can reach several hundred) are divided into small intervals, for which a computational experiment is carried out with a sequential simplification of the model. Then, for each interval, the most significant parameters are identified by recognition methods, on the basis of which a simplified model of the car is automatically built for the corresponding set of parameter values of the complex original model.

Увеличение количества транспортных средств и рост интенсивности движения приводят к необходимости повышения их надёжности и безопасности. Увеличение транспортного потока и рост числа большегрузных автомобилей ведёт к ускорению разрушения дорожных покрытий.

Постоянная модернизация транспортных средств, активное внедрение элементов автоматического регулирования в различных компонентах автомобилей требует оценки влияния всех вводимых усовершенствований на поведения автомобиля.

Современные исследования динамики автомобиля существенным образом отличаются не только от классических, восходящих к работам Жуковского и Рокара, но и от методов двадцати – тридцатилетней давности.

С одной стороны, развитие компьютерных технологий, связанных с аналитическими преобразованиями, позволяет рассматривать модели транспортных средств с большим числом степеней свободы, причем не только (в принципе) выписывать в аналитическом виде уравнения движения (необозримые с точки зрения специалиста, выполняющего преобразования вручную). Сочетание этих методов с численным анализом на быстродействующим компьютере позволяет (в принципе) определить движение при самых разнообразных условиях.

С другой стороны, рост числа публикаций указывает на большое количество трудно решаемых проблем, одна из важнейших из них - определение зависимости тех или иных динамических свойств систем, например, устойчивости или характера потери устойчивости от тех или иных параметров задачи, причём эти проблемы такого рода, решение которых не может быть автоматически достигнуто увеличением количества учитываемых параметров или числа степеней свободы.

Последние исследования ученых [1, 2] показали, что разумное сокращение числа степеней свободы и учитываемых параметров не оказывает существенного влияния на целый ряд практически важных параметров движения. Это указывает на необходимость наиболее полного изучения свойств простых моделей автомобиля и увеличения числа степеней свободы и количества учитываемых параметров лишь в случае необходимости.

Особое значение среди элементов автомобиля, в значительной мере определяющих его динамику, имеет пневматическая шина вследствие её роли связующего звена между экипажем и дорогой. Все соответствующие силы для ускорения, торможения, криволинейного движения реализуются через силовое взаимодействие между шиной и дорогой. Несмотря на необозримое количество работ, предметом рассмотрения которых являлась пневматическая шина, ввиду сложности ее свойств изучение влияния свойств шины на динамику автомобиля продолжает оставаться одной из актуальнейших задач как теоретической, так и технической механики. С одной стороны, ведутся исследования по всё более полному учёту всех параметров шины (число их уже перевалило за 120), с другой стороны, построена [3] феноменологическая теория качения, позволяющая, при уменьшении, по крайней мере, на порядок числа учитываемых параметров построить модель шины, учитывающую общий случай деформации и дающую возможность получения, как частных случаев, всех ранее известных моделей теории качения (Рокара, Келдыша и т.п.).

Таким образом, современный уровень развития теории качения, программного обеспечения вычислительной техники, давая принципиальную возможность рассмотрения модели автомобиля практически любой сложности, в то же время не может обеспечить проведение анализа влияния многочисленных постоянных и физических параметров задачи на устойчивость движения при формально квалифицированном их применении, что



обусловлено чрезвычайной сложностью рассматриваемой задачи. Здесь необходимы совместные исследования высококвалифицированных специалистов как по теоретической механике, так и по разработке и, грамотному применению современных компьютерных технологий, причём исследования такого уровня требуют непрерывного тесного сотрудничества этих специалистов. На пути такого сотрудничества к настоящему времени разработана и реализована [4] автоматизация исследования устойчивости прямолинейного движения для одной из простейших моделей автомобиля. После получения (пока вручную) уравнений возмущенного движения с выделенным первым приближением эта система даёт возможность для 5 различных моделей шины проанализировать влияние более 30 параметров автомобиля.

Построенная система исследования устойчивости движения автомобиля может быть использована для любой модели автомобиля и любого движения, если для неё будут составлены в явном виде соответствующие характеристические уравнения, для чего, в свою очередь, необходимо получение явного вида уравнений возмущенного движения с выделенным первым приближением.

К настоящему времени имеются определенные результаты по автоматизации этапа составления уравнений возмущенного движения сложных нелинейных механических систем как с использованием стандартных систем обработки символьной информации, например. Maple V.6, так и оригинальных процедур [5, 6]. Необходимость автоматизации и этого этапа исследования в значительной мере обусловлена тем, что для криволинейного движения, в отличие от случая прямолинейного движения (которое оставалось прямолинейным при любой из 5 моделей шины), параметры невозмущенного движения при одной и той же линейной скорости автомобиля и приложенной тяге будут изменяться в зависимости от выбранной модели взаимодействия шины и дороги. Очевидно, что это обстоятельство чрезвычайно усложнило бы задачу, при ручном составлении уравнений возмущенного движения.

Кроме того, при автоматическом составлении уравнений возмущенного движения возможен переход к следующему этапу - автоматизации определения глубины моделирования - числа и выбора степеней свободы и параметров, не только достаточных, но и необходимых для адекватного описания динамики автомобиля. Автоматизация определения глубины моделирования должна обеспечить возможность проведения анализа влияния тех или иных параметров автомобиля, на его динамику (в частности, устойчивости движения). Диапазоны изменения параметров автомобиля (число которых может достигать нескольких сот) разбиваются на небольшие интервалы, для которых проводится вычислительный эксперимент при последовательном упрощении модели. Затем для каждого интервала методами распознавания выделяются наиболее значимые параметры, на основе чего автоматически строится упрощенная модель автомобиля для соответствующего набора значений параметров исходит сложной модели.

Поэтому возникает проблема о необходимости разработки научных основ механики колесных транспортных машин с учетом реальных упругих характеристик шин и характеристик их взаимодействия с дорогой, а также конструктивных особенностей передней подвески и системы рулевого управления на основе динамики систем с качением.

Для решения этой проблемы в работе решаются следующие основные задачи:

1. Разработка математических моделей прямолинейного движения колёсных транспортных машин по ровной дороге (на примере автомобиля) с учётом поперечного и продольного углов крена автомобиля.

2. Разработка математической модели движения колесных транспортных машин (на примере автомобиля) по наклонной плоскости с учётом упругости и деформируемости шин.

3. Разработка математической модели криволинейного движения колесных транспортных машин (на примере автомобиля) с учетом упругости и деформируемости шин.

4. Разработка программно-инструментального средства (ПИС) автоматизации научных исследований для выбора математических моделей, алгоритмов из базы данных, соответствующих постановкам задач. Автоматизация процесса компоновки прикладных модулей для проведения соответствующих расчетов.

5. Проведение вычислительного эксперимента с помощью (ПИС) по исследованию задач об устойчивости прямолинейного и криволинейного движения автомобиля с учетом упругости и деформируемой шин, поперечного и продольного крена кузова автомобиля с целью определения рациональных значений параметров шин.

2. Постановка задачи. Уравнения кинематических связей

При выводе уравнений движения сделаем следующие упрощающие предположения:

Масса неподдрессоренной части экипажа (передний и задний мост с колёсами) пренебрежимо мала по сравнению с массой под рессорной части (кузова) экипажа; колеса являются одинаковыми жёсткими дисками; качение колёс осуществляется без скольжения; система рулевого управления жёсткая и лишена люфтов и инерционности; кузов экипажа – твёрдое тело, установленное на четырёх линейных пружинах с линейными демпферами; пружины перемещаются только лишь в вертикальном направлении; кузов экипажа испытывает продольную и боковую качку; кузов экипажа считается симметричным относительно продольной средней плоскости; экипаж имеет возможность поворачиваться вокруг вертикальной оси; движение экипажа происходит по плоскости; продольная скорость движения экипажа и угол поворота рулевого колеса – заданные функции времени; передние колёса являются управляемыми, а задние колёса – ведущими.

При сделанных предположениях получаем модель, изображенную на рис.2.1, где $Oxyz$ - неподвижная система координат Σ , плоскость xy которая совпадает с плоскостью качения, а ось Oz направлена вверх. Считая кузов экипажа симметричным относительно продольной средней плоскости, введем подвижную систему координат $\Sigma_2 - O_2x_2y_2z_2$, скрепленную с кузовом так, что ось O_2z_2 направлена вверх и проходит через центр масс подрессорной части (т.е.кузова), а оси O_2x_2 и O_2y_2 лежат в плоскости, проходящей через верхние точки крепления пружин, причём ось O_2x_2 направлена вперед. Кроме системы Σ_2 введём подвижную систему $\Sigma_1 - O_1x_1y_1z_1$, связанную с неподдрессорной частью экипажа. Начало координат O_1 системы Σ_1 совпадает с проекцией точки O_2 на плоскость xy , ось O_1x_1 направлена вперёд вдоль экипажа, а ось O_1z_1 - вверх (рис.2.1).

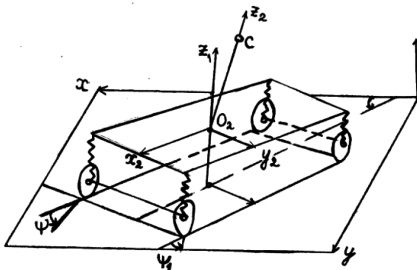


Рис 2.1

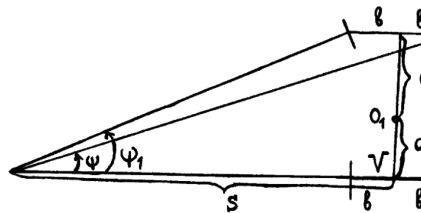


Рис.2.2

Поскольку собственное вращение колёс в данной постановке задачи нас не интересует, положение экипажа определяется семью обобщенными координатами: $x, y, z, \alpha, \beta, \theta, \psi$, где x, y, z - декартовы координаты точки O_2 (см.рис.2.1), α - угол



продольного наклона кузова, β - угол поперечного наклона кузова, θ -угол между продольной осью экипажа и осью Ox , ψ - угол поворота плоскости правого переднего колеса. Угол поворота ψ_1 левого переднего колеса связан с ψ простым соотношением

$$tg\psi_1 = tg\psi \cdot (1 - \lambda tg\psi)^{-1}, \quad (2.1)$$

в котором $\lambda = 2b/(a_1 + a_2)$ представляет отношение длины оси к базе экипажа, b - длина полуоси, a_1 -расстояние от точки O_1 до передней оси, a_2 -расстояние от точки O_1 до задней оси. Соотношение (2.1) получается из геометрических соображений и условий качения всех колёс без скольжения. (см.рис.2.2).

Для получения кинематических уравнений, изображающих отсутствие скольжения всех колёс в поперечном направлении, рассмотрим рис.2.3, где единичные векторы $e_1\{\sin\psi, -\cos\psi, 0\}_{\Sigma_1}$, $e_1\{-\sin\psi_1, \cos\psi_1, 0\}_{\Sigma_1}$, $e_2\{0, 1, 0\}_{\Sigma_1}$ указывают соответствующие направления. Для переднего правого колеса имеем

$$(\overline{V}_{O_1} + \overline{\omega} \times \overline{r}_1)\overline{e} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $\overline{V}_{O_1}\{x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta, 0\}_{\Sigma_1}$ - скорость точки O_1 , $\overline{\omega}\{0, 0, \theta\}_{\Sigma_1}$ -угловая скорость вращения экипажа вокруг оси, перпендикулярной плоскости качения, $\overline{r}_1\{a_1, -b, 0\}_{\Sigma_1}$ - радиус вектор, проведённый из O_1 в точку соприкосновения правого колеса с плоскостью качения. В результате из (2.2) получаем

$$x\sin(\psi + \theta) - y\cos(\psi + \theta) + \theta(b\sin\psi - a_1\cos\psi) = 0. \quad (2.3)$$

Аналогичное уравнение для переднего левого колеса имеет вид

$$(\overline{V}_{O_1} + \overline{\omega} \times \overline{r}_2)\overline{e}_1 = 0,$$

где $\overline{r}_2\{a_1, b, 0\}_{\Sigma_1}$. Отсюда находим уравнение

$$x\sin(\psi_1 + \theta) - y\cos(\psi_1 + \theta) - \theta(b\sin\psi_1 + a_1\cos\psi_1) = 0,$$

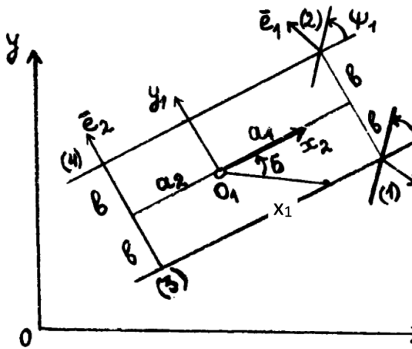


Рис.2.3

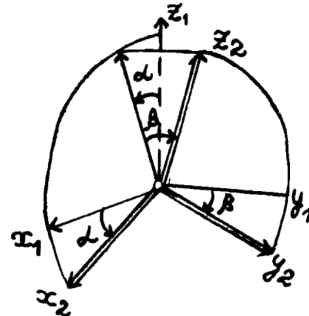


Рис.2.4

которое после использования (2.1) записывается в виде

$$(x\cos\theta + y\sin\theta - b\theta)tg\psi + (x\sin\theta - y\cos\theta - a_1\theta)(1 - \lambda tg\psi) = 0. \quad (2.4)$$

Для задних колёс получаем уравнение

$$x\sin\theta - y\cos\theta + a_2\theta = 0. \quad (2.5)$$

Поскольку уравнения (2.3) – (2.5) функционально зависимы, для отображения условия качения без скольжения в боковом направлении всех четырёх колёс достаточно принять во внимание только два из этих уравнений, например, (2.3) и (2.5), которые и следует рассматривать как уравнения кинематических связей, являющиеся неголономными [1].

Отсутствие бокового скольжения колёс приводит к тому, что траектория и закон движения точки O_1 оказываются известными, если $V = V(t)$ и $\psi = \psi(t)$ являются заданными функциями времени. В самом деле, согласно обозначениям на рис.2.2 $a(\rho + b)^{-1} = tg\psi$, $\rho\dot{\theta} = V$.

Отсюда $\Omega \equiv \dot{\theta} = V \sin\psi (a \cos\psi - b \sin\psi)^{-1}$ и, следовательно,

$$\theta = \int_{t_0}^t V \sin\psi (a \cos\psi - b \sin\psi)^{-1} dt + \theta_0. \quad (2.6)$$

Из соотношения $V = \dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta$ и уравнения (2.5), которое можно записать в виде $\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta = -a_2\Omega$, ($\Omega \equiv \dot{\theta}$), находим $\dot{x} = V \cos\theta - a_2\Omega \sin\theta$, $\dot{y} = V \sin\theta + a_2\Omega \cos\theta$. Отсюда

$$x = \int_{t_0}^t (V \cos\theta - a_2\Omega \sin\theta) dt + x_0, \quad y = \int_{t_0}^t (V \sin\theta + a_2\Omega \cos\theta) dt + y_0. \quad (2.7)$$

Таким образом, из семи обобщенных координат системы $x, y, z, \alpha, \beta, \theta, \psi$ остаются неизвестными функциями времени лишь три координаты: z, α, β , для определения которых и следует составлять уравнения движения.

3. Методы решения

Согласно обозначениям на рис.2.1 и рис.2.4 для малых углов α, β таблицы косинусов углов между соответствующими координатными осями имеют вид

	x_2	y_2	z_2
x_1	1	0	α
y_1	0	1	β
z_1	$-\alpha$	$-\beta$	1

	x_1	y_1	z_1
x	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0
y	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
z	0	0	1

	x_2	y_2	z_2
x	$\cos\theta$		$-\sin\theta$
	$\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta$		
y	$\sin\theta$		$\cos\theta$
	$\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta$		
z	$-\alpha$	$-\beta$	1

Считая кузов симметричным относительно плоскости $x_2 z_2$, обозначим через γ угол между главными направлениями центрального эллипсоида инерции кузова и осями x_2, z_2 . Соответствующая таблица косинусов углов между осями ξ, y, ζ и x_2, y_2, z_2 для малых значений угла γ имеет вид

	ξ	y	ζ
x_2	1	0	γ
y_2	0	1	0
z_2	$-\gamma$	0	1

а сечение кузова изображено на рис.2.5.

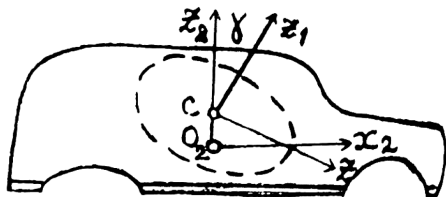


Рис.2.5

Введём уравнения колебаний кузова, используя уравнения в квазикоординатах. Для этого введем квазикоординаты π_i ; ($i=1,7$) так, что первые четыре квазикоординаты $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ являются истинными координатами, $\pi_5 = V(t)$ представляет заданную продольную скорость движения экипажа, а π_6 и π_7 равны левым частям уравнений кинематических связей (2.5) и (2.3).

В результате имеем соотношения

$$\begin{aligned} \pi_1 = z; \quad \pi_2 = \alpha; \quad \pi_3 = \beta; \quad \pi_4 = \psi; \quad \pi_5 = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ \pi_6 = x \sin \theta - y \cos \theta + a_2 \theta; \quad \pi_7 = x \sin(\psi + \theta) - y \cos(\psi + \theta) + \theta(-a_1 \cos \psi + b \sin \psi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда, обозначая $\Delta = (a \cos \psi - b \sin \psi)^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} \theta &= \Delta(\pi_5 \sin \psi + \pi_6 \cos \psi - \pi_7), \\ \dot{x} &= \pi_5 \cos \theta + \left[-\pi_5 a_2 \Delta \sin \psi + (1 - a_2 \Delta \cos \psi) \pi_6 + a_2 \Delta \pi_7 \right] \sin \theta, \\ \dot{y} &= \pi_5 \sin \theta - \left[-\pi_5 a_2 \Delta \sin \psi + (1 - a_2 \Delta \cos \psi) \pi_6 + a_2 \Delta \pi_7 \right] \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как известно [1,2], уравнения в квазикоординатах имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} + \gamma_{ijk} \frac{\partial T^*}{\partial \pi_j} \pi_k = \Pi_i - \frac{\partial R}{\partial \pi_i} \quad (i=1,2,\dots) \quad (2.10)$$

Здесь T^* - выражение кинетической энергии $T(q, \dot{q})$ после замены всех обобщенных скоростей \dot{q}_k на квазискорости $\dot{\pi}_j$ при помощи соотношений (2.8) и (2.9), $R(q, \pi)$ - функция Релея, при помощи которого учитывается рассеяние механической энергии из-за наличия сил вязкого трения.

$\partial T^* / \partial \pi_k$ - оператор, который для истинных координат совпадает с операцией частного дифференцирования по соответствующей координате. Коэффициенты γ_{ijk} находятся при помощи перестановочных соотношений



$$d\delta\pi_j - \delta d\pi_j = \gamma_{ijk} d\pi_k \delta\pi_i, \quad (2.11)$$

которые составляются исходя из (2.8) и (2.9), т.е. соотношения между квазикоординатами и истинными координатами.

В нашем случае коэффициенты γ_{ijk} будут отличными от нуля лишь для $i = 4, 5, 6, 7$, поэтому составлять перестановочные соотношения (2.11) нет необходимости.

Уравнения (2.10) для первых трёх квазикоординат, совпадающих с истинными координатами, записываются в виде

Литература:

1. Тураев Х.Т., Фуфаев Н.А., Мусарский Р.А., Теория движения систем с качением, ФАН, Ташкент, 1987, 158 с.
2. Тураев Х.Т. Моделирование и исследование динамики колесных транспортных машин с деформируемыми шинами, ФАН, Ташкент, 1995, 168 с.
3. Айзерман М.А. Теория автоматического регулирования двигателей. Уравнения движения и устойчивость. М., «Наука», 1966.
4. Olimjon Dusmatov, Erkin Urunboev, and Abdumajid Mamatkabulov. Rectilinear car motions taking into account the elasticity and deformability of tires // Ural Environmental Science Forum "Sustainable Development of Industrial Region" (UESF-2023), E3S Web of Conferences. –2023. –Vol. 389. Issue: 01024. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338901024>
5. Дусматов О.М., Маматкабилов А.Х. Устойчивость движения автомобиля с учетом упругости и деформируемости шин. // Узбекский журнал, Проблемы механики. –2023. – №1. – С. 8-14.
6. Маматкабилов А.Х. Исследование устойчивости автомобиля при криволинейном движении. // Научный вестник СамГУ. –2022. – №5 (135). – С. 92-97.
7. Dusmatov O.M., Mamatkabilov A.Kh. Mathematical modeling of the curvilinear motion of the car, taking into account the elasticity and deformability of tires // Annali d'Italia (Italy's scientific journal) is a peer-reviewed European journal covering top themes and problems in various fields of science. –2022. –№33, –P. 34-47. (IF=0,7930) <http://www.itadiana.com/wp-content/uploads/2022/07/Annali-d%E2%80%99Italia-%E2%84%96633-2022.pdf>