DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI MATHCAD VA MAPLE DASTURLARIDAN FOYDALANIB O‘QITISH METODIKASI

Ismoilov E.O.
Nizomiy nomidagi TDPU
“Umumiy matematika” kafedrasi dotsenti v.b., PhD

Tayanch so‘zlar: differensial tenglama, Mathcad, Maple, grafik, diagramma, Runge-Kutta usuli, Eyler usuli.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение, Mathcad, Maple, график, диаграмма, метод Рунге-Кутта, метод Эйлера.
Key words: differential equation, Mathcad, Maple, graph, diagram, Runge-Kutta method, Euler's method.

Резюме:
Maqolada differensial tenglamalarni Mathcad va Maple dasturlaridan foydalanib o‘qitish metodikasi yoritib berilgan. Mathcad va Maplening afzalliklari hamda differensial tenglamalarni yechishda ushbu dasturlardan qanday foydalanish kerakligi batafsil bayon etib berilgan. Bundan tashqari, maqolada, matematika fani o‘qituvchilari uchun, ta’lim jarayonida Mathcad va Mapledan foydalanishga doir bir qancha taklif va tavsiyalar ham keltirilgan.
Резюме:
В статье описана методика обучения дифференциальным уравнениям с использованием программ Mathcad и Maple. Подробно описаны преимущества Mathcad и Maple, а также способы использования этих программ для решения дифференциальных уравнений. Кроме того, в статье приводится ряд предложений и рекомендаций для учителей математики по использованию Mathcad и Maple в учебном процессе.
Summary:
The article describes the method of teaching differential equations using Mathcad and Maple programs. The advantages of Mathcad and Maple are described in detail, as well as how to use these programs to solve differential equations. In addition, the article provides a number of suggestions and recommendations for mathematics teachers on the use of Mathcad and Maple in the educational process.

Ma’lumki axborot texnologiyalaridan foydalanish o‘quv jarayonini tashkil etishning yangi va samarali shakllaridan biridir. Bu, asosan, o‘quvchilarning mustaqil ishlariga qaratilgan aniq bir o‘quv dasturini amalga oshirishdir. Axborot jamiyatiga o‘tish ta’lim mazmunini va o‘qitish usullarini modernizatsiya qilish uchun yangi imkoniyatlar ochmoqda. Kompyuter matematik bilim va ko‘nikmalarni tuzish va tizimlashtirish, dunyoqarashni shakllantirish va o‘quvchi ongini rivojlantirish uchun kuchli vositaga aylanmoqda. Matematikani o‘qitishda kompyuterdan tizimli foydalanishda quyidagi asosiy fikrlarni hisobga olish kerak: Kutilayotgan natijani olish uchun o‘quv jarayonida kompyuterdan doimiy ravishda foydalanish shart; O‘qituvchi kompyuterni yaxshi bilishi, o‘quv materialidan o‘quvchilarni faollashtirishga yo‘naltirilgan turli xil o‘quv faoliyatlarida foydalanish uchun moslashuvchan metodologiyani qo‘llamog‘i zarur [1]. Keyingi vaqtlarda matematika va informatika fanlari kesimida yangi fundamental-ilmiy yo‘nalish “kompyuter matematikasi” yo‘nalishi paydo bo‘ldi va ilmiy hisob-kitoblarda hamda o‘quv jarayonlarida keng qo‘llanilmoqda. Hozirgi vaqtda kompyuter matematikasi, kompyuter industriyasi va programmalashtirish texnologiyalarining jadal suratlar bilan rivojlanishi ta’lim-tarbiya, ilmiy-metodik va ilmiy tadqiqot ishlarini avtomatlashtirishning asosi sifatida e’tirof etilmoqda. Ayni vaqtda zamonaviy axborot texnologiyalari sohasida qo‘lga kiritilgan yutuqlarni qo‘llash natijasida ilmiy-tadqiqot, ilmiy-metodik, ilmiy-texnik, injenerlik, moliyaviy va iqtisodiy, kimyoviy, biologik masalalarni yechishni avtomatlashtirish tomon yo‘naltirilgan ko‘plab dasturiy vositalar mavjuddir. Masalan: Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad, Derive, Scientific, Workplace, Femlab, FeexPDE kabi universal dasturiy muhitlar shular jumlasidandir. Bulardan ikkitasi professional matematiklar va ilmiy-tadqiqotlar olib boruvchi mutaxassislar tomonidan keng qo‘llanilmoqda.

Mathcad injenerlik hisob-kitob ishlarining instrumenti sifatida ishlab chiqilgan bo‘lib, hozirda yetarlicha murakkablikka ega bo‘lgan hisob-kitoblarni bajarishda, ilmiy-tekshirish ishlarida har xil sonli algoritmlarni va analitik almashtirishlarni bajarishda foydalanilmoqda. Matematika fanini o‘qitishda axborot texnologiyalari sohasida qo‘lga kiritilgan eng ilg‘or yutuqlardan hisoblangan Mathcad, Maple dasturiy muhitlaridan foydalanish darsning qiziqarli va samarali bo‘lishini ta’minlovchi asosiy mezonlardan biridir. Mathcad professor-o‘qituvchilar, stajorlar, tadqiqotchilar, aspirantlar, talabalar, texnik muhandislar va fiziklar, qolaversa barcha kasb egalari uchun hisoblash ishlarini bajarib beruvchi dasturiy ta’minot hisoblanadi. Bu dastur bilan turli kasb egalari o‘z sohalariga tegishli masalalarni hal etishi va kerakli grafiklarni, diagrammalarni olishlari mumkin. Mathcad dasturini, boshqacha qilib aytganda, dasturlash tili deyish mumkin. Masalan, differensial tenglamalarni Mathcad dasturida yechishda Given-Odesolve hisoblash blogidan foydalanish mumkin [2]:

Given

$$y'''(x) - 2^{-x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x)$$

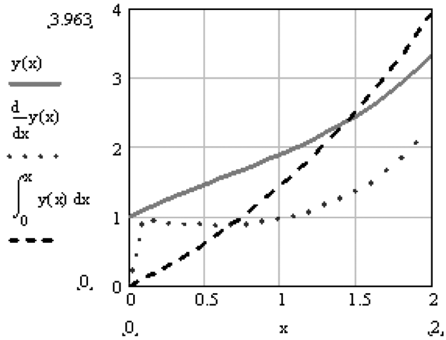
$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y''(0) = -0.5$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(x, 2)$$

$$x := 0, 0.1 .. 2$$



Bu yerda uchinchi tartibli o‘zgaruvchi koeffitsientli differensial tenglama yechish algoritmi keltirilgan.

Ma’lumki, o‘quv jarayonida differensial tenglamalarning tor doiradagi sinflarini yechish o‘rgatiladi, lekin ta’lim jaranida, biz, kompyuter matematikasi tizimlarini qo‘llash natijasida differensial tenglamalarning keng doiradagi sinflarini yechish imkoniyatiga ega bo‘lamiz, bu esa darsning samarali va qiziqarli bo‘lishini ta’minlaydi. Mathcad Given-Odesolve hisoblash blogi yordamida yechim funksiyadan hosila olish va uni integrallash mumkin. Bu yuqoridagi grafikda ko‘rinib turibdi. Yana shuni ta’kidlash kerakki, Mathcad differensial tenglamalarning umumiy va analitik yechimlarini topish imkoniyatiga ega emas. Bu muammoni Maple tizimida hal qilish mumkin. Differensial tenglamalarni Maple dasturida yechishda dsolve(tenglama, o‘zgaruvchi, variant) komandasi ishlatiladi, bu yerda tenglama – differensial tenglama, o‘zgaruvchi – differensial tenglama yechimi, variant – shart bo‘lmagan parametr bo‘lib, kalit so‘z=qiymat ko‘rinishda beriladi [3]. Maple dsolve komandasi yordamida ko‘p sondagi differensial tenglamalarning umumiy va analitik yechimlarini topish mumkin. Agar variant type=exact ko‘rinishda berilsa, analitik yechim topishga harakat qilinadi. Agar variant type=series ko‘rinishda berilsa, yechim qator ko‘rinishda izlanadi. Agar variant type=numeric ko‘rinishda berilsa, sonli yechim izlanadi. Endi quyidagi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)=\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}+2\,x$$

differensial tenglamani analitik yechishga harakat qilamiz:

> eq:=diff(y(x),x)=sqrt(x^2-y(x))+2*x;

$$eq := \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)=\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}+2\,x$$

> dsolve(eq,y(x));

$$8\,\frac{\mathrm{y}(x)\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}}{2\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}-x}+\frac{4\,\mathrm{y}(x)\,x}{2\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}-x}-\frac{6\,x^2\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}}{2\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}-x}-\frac{3\,x^3}{2\sqrt{x^2-\mathrm{y}(x)}-x}-\_C1=0$$

Yechim oshkormas holda topildi.

> isolate(%,y(x)); komandasi yordamida yechimni analitik holga keltiramiz:

$$\mathrm{y}(x)=\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}(-x+\sqrt{-\_C1})\,x+\frac{1}{4}\_C1$$

Agar

$$\mathrm{y}(1)=0$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topmoqchi bo‘lsak, Maplening solve komandasidan foydalanib, o‘zgarmas C1 ning qiymatini topamiz:

> x:=1;y:=0;solve(y = 5/4*x^2+1/2*(-x+sqrt(-C1))*x+1/4*C1,C1);

$$x := 1$$

$$y := 0$$

-9

U holda, xususiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y(x)=\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}(-x+3)\,x-\frac{9}{4}.$$

Differensial tenglamalarni Maple dasturi yordamida yechishga doir yana bir nechta misollar keltiramiz:

> diff(y(x),x$2)-y(x)=sin(x)*x;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right)-y(x)=\sin(x)\,x$$

> dsolve(diff(y(x),x$2)-y(x)=sin(x)*x,y(x));

$$y(x)=-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)\,x+\_C1\,e^{x}+\_C2\,e^{(-x)}$$

Bu yerda, umumiy yechim topildi. Yechimdagi *S1* va *S2* lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Boshlang‘ich shartlar differensial tenglamalarda vergul orqali beriladi va tenglama bilan birlashtiriladi:

> restart;dsolve({diff(v(t),t)+2*t=0,v(1)=5},v(t));

$$v(t)=-t^2+6$$

Hosilalar boshlang‘ich shartlarda operator ko‘rinishida: D(D(y))(0) yoki D(@@2)(y)(0) ko‘rinishda yoziladi:

> de1:=diff(y(t),t$2)+5*diff(y(t),t)+6*y(t)=0;

$$de1:=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(t)\right)+5\left(\frac{\partial}{\partial t}y(t)\right)+6\,y(t)=0$$

> dsolve({de1,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(t),method=laplace);

$$y(t)=-e^{(-3\,t)}+e^{(-2\,t)}.$$

Endi to‘rtinchi tartibli tenglama yechamiz:

> de2:=diff(y(x),x$4)+2*diff(y(x),x$2)-cos(x)=3;

$$de2:=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}y(x)\right)+2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right)-\cos(x)=3$$

> dsolve(de2,y(x)):combine(%);

$$y(x)=-\cos(x)-\frac{1}{2}\_C1\cos(\sqrt{2}\,x)-\frac{1}{2}\_C2\sin(\sqrt{2}\,x)+\frac{3}{4}x^2+\_C3\,x+\_C4.$$

Quyidagi tenglama uchun yechim o‘zgaruvchini almashtirish usuli yordamida topiladi:

> restart;q:=(2*sqrt(x*y(x))-x)*diff(y(x),x)+y(x);

$$q:=(2\sqrt{x\,y(x)}-x)\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)+y(x)$$

O‘zgaruvchini almashtirish uchun DEtools paketining Dchangevar komandasi qo‘llaniladi:

> restart;q:=(2*sqrt(x*y(x))-x)*diff(y(x),x)+y(x);

$$q:=(2\sqrt{x\,y(x)}-x)\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)+y(x)$$

> with(DEtools):f:=Dchangevar({y(x)=v(x)*x},[q],x);

$$f:=(2\sqrt{x^2\,v(x)}-x)\left(\frac{\partial}{\partial x}v(x)\,x\right)+v(x)\,x.$$

XX asrning 50 yillaridan boshlab bir vaqtda juda sekin va yetarlicha katta tezlikda o‘tadigan kimyoviy reaksiyalar ostida sodir bo‘ladigan jarayonlarning kinetikasi o‘rganila boshlandi. Ana shunday ko‘plab amaliy masalalar oddiy differensial tenglamalar hamda oddiy differensial tenglamalar sistemasining alohida turlari uchun Koshi masalasini yechishga keltiriladi. Bunday tenglamalarni *maxsus differensial tenglamalar* yoki *maxsus differensial tenglamalar sistemasi* deb atash mumkin. Ushbu turga tegishli differensial tenglamalar va ularning sistemasini eng ishonchli hisoblangan Runge-Kutta usulini qo‘llab sonli yechganda, olingan yechimning integrallash oralig‘ining nolga yaqin qismida sekin, keyingi qismga o‘tganda, ya’ni o‘tish fazasida keskin o‘zgarishi kuzatildi. Kuzatilgan hodisa bunday turdagi tenglamalarni yechish uchun Runge-Kutta, Eyler va shular kabi hisoblash matematikasi kursidan ma’lum bo‘lgan boshqa usullarning yaroqsiz ekanligini bildiradi. Amaliyotda ushbu sinfga tegishli shunday differensial tenglamalar uchraydiki, ularni yuqorida qayd etilgan usullar bilan sonli yechish uchun millionlab, milliardlab, hatto undan ko‘p nuqtalarda integrallashga to‘g‘ri keladi. Maxsus differensial tenglamalar yoki ularning sistemasining yechimlari ikki qismdan iborat bo‘ladi. Ulardan biri yetarlicha sekin o‘zgaradigan, ikkinchisi katta tezlik bilan nolga intiladigan funksiyadir. Ana shu ikkinchi funksiya qiymatlarini hisoblashda amaliy jihatdan ma’lum qiyinchiliklar yuzaga keladi. Masalan, quyidagi Koshi masalasini qaraylik:

$$y'' + 101 \cdot y' + 100y = 0, \qquad (1)$$

$$y(0) = 1.01, \qquad y'(0) = -2. \qquad (2)$$

Berilgan ushbu ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 + 101 \cdot k + 100 = 0$$

$k_1 = -1, k_2 = -100$ yechimlarga ega bo‘lgani uchun (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-100x} \qquad (3)$$

ko‘rinishda yoziladi. Berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y(x) = e^{-x} + 0.01 \cdot e^{-100x} \qquad (4)$$

Olingan analitik yechim ikkita funksiya yig‘indisidan iborat bo‘lib, ulardan birinchisining qiymatlari nisbatan tekis va sekin o‘zgaradi, ikkinchi funksiyaning qiymatlari tez o‘zgaruvchan bo‘lib, nolga katta tezlik bilan intiladi.

Quyidagi jadvalda bu ikki funksiya taqribiy qiymatlarining [0; 0.1] kesmadagi o‘zgarish qonuniyati keltirilgan:

Jadval. $y(x) = e^{-x} + 0.01 \cdot e^{-100x}$ *funksiya taqribiy qiymatlarining [0; 0.1] kesmadagi o‘zgarish qonuniyati.*

x	$Y_1 = e^{-x}$	$Y_2 = 0{,}01 \cdot e^{-100x}$
0	1	0,01
0,00001	0,99999	0,009999
0,0001	0,9999	0,0099
0,001	0,999	0,009
0,01	0,99	0,004
0,1	0,9	0,0000004

Jadvaldagi qiymatlardan ko‘rinib turibdiki, [0;0.1] kesmadan tashqarida, ya’ni o‘tish fazasida yechimning ikkinchi qo‘shiluvchisi hisobga olmasa ham bo‘ladigan darajada kichik qiymatlarga ega bo‘lar ekan. Bundan (1)-(2) masala yechimini [0;0.1] *kesmada yetarlicha kichik qadam bilan sonli topish va o‘tish fazasida kompyuter vaqtini tejash hamda yaxlitlash xatoliklarini kamaytirish maqsadida integrallash qadamini kattalashtirish zarur* degan xulosaga kelish mumkin. Amaliy hisoblar bu xulosaning noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatdi. Chunki yuqorida keltirilgan tanish usullarni qo‘llab, turg‘un yechim olish uchun birinchi funksiya hisobiga integrallash oralig‘ining barcha qismida bir xil bo‘lgan yetarlicha kichik integrallash qadami talab etiladi.

Bunday muammolar Maple tizimida osongina hal qilinadi. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi Mapleda osongina quyidagicha topiladi:

```
> restart;
> eq:=diff(y(x),x$2)+101*diff(y(x),x)+100*y(x)=0;
```

$$eq := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 101\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 100\,\mathrm{y}(x) = 0$$

> **dsolve(eq,y(x));**

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathrm{e}^{(-x)} + \_C2\,\mathrm{e}^{(-100x)}$$

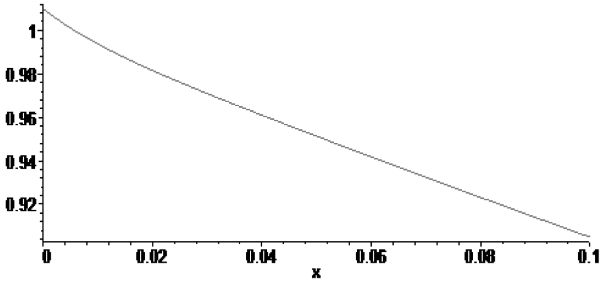
Tenglamaning boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi esa Mapleda quyidagicha topiladi:

> **cond:=y(0)=1.01,D(y)(0)=-2;de:=dsolve({eq,cond},y(x));**

$$cond := \mathrm{y}(0) = 1.01,\ \mathrm{D}(y)(0) = -2$$

$$de := \mathrm{y}(x) = \mathrm{e}^{(-x)} + \frac{1}{100}\,\mathrm{e}^{(-100x)}$$

> **plot(exp(-x)+1/100*exp(-100*x),x=0..0.1); buyrug‘i esa differensial tenglamaning yechimi bo‘lgan funksiyaning** $x = [0; 0.1]$ kesmadagi grafigini avtomatik ravishda chizib beradi hamda o‘quvchida **differensial tenglamaning yechimi bo‘lgan funksiya grafigi haqida to‘la tasavvur shakllanishiga yordam beradi.**



$y(x) = e^{-x} + 0.01 \cdot e^{-100x}$ **funksiyaning** $x = [0; 0.1]$ kesmadagi grafigi.

Ta’lim jarayonida Maple dasturidan foydalanilishi yechim funksiya grafigini amalda ko‘rish imkonini beradi va o‘quvchilar funksiya grafigiga qarab yechimning qanchalik to‘g‘ri topilganini to‘la-to‘kis anglab yetadilar.

Matematika fanini o‘qitishda axborot texnologiyalari sohasida qo‘lga kiritilgan eng ilg‘or yutuqlardan hisoblangan Mathematika, Maple, Mathlab kabi dasturiy muhitlardan hisoblangan Mathcad va Mapledan foydalanish o‘quvchilarni to‘liq darsga jalb qilish imkonini beradi hamda o‘quvchilarda matematika fanini va uning so‘nggi yutuqlarini o‘rganishga bo‘lgan ishtiyoqni yanada oshiradi. O‘quvchilar matematika fanini chuqur o‘rganish kerakligini ongli ravishda tushunib yetadilar hamda o‘zlari, mustaqil ravishda, matematika fanining eng so‘nggi yutuqlarini o‘rganishda kirishadilar [4].

Xulosa o‘rnida shuni ta’kidlash kerakki, ta’lim jarayonida va ilmiy-tatqiqot ishlarida Mathcad va Maplening qo‘llanishi ko‘pgina muammolarning hal etilishida katta yordam beradi.

Adabiyotlar:

1. Kiryanov D.V. Mathsad 15/ MathsadPrime 1.0 SPb.: BXV – Peterburg, 2012. – 400 s.
2. Agapova N.V. Perspektivы razvitiya noвых texnologiy obucheniya. – M.: TK Velbi, 2005. – 247 s.
3. Sdvijkov O.A. Matematika na kompyutere: Maple – 8. M.: SOLON – Press, 2003.
4. Takemitsu Hasegawa, Hiroshi Sugiura. A user-friendly method for computing indefinite integrals of oscillatory functions. Journal of Computational and Applied Mathematics. Volume 315, 1 May 2017, Pages 126-141.