INTERNATIONAL INNOVATION AND RESEARCHES
International scientific journal Volume: 2 Issue: 4

УДК 532.516

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Раджабов Сухроб Худойбердиевич
Филиал СамДУ в Каттакургане
rajabovsuxrob72@gmail.com

Фармонов Уктамджон Рустамович
Студент филиала СамДУ в Каттакургане
oktamjonfarmonov@gmail.com

Аннотация. *В статье рассматривается нестационарное течение вязкоупругой жидкости в плоском канале. Из-за значительных математических трудностей, возникающих при решении подобных задач в трубопроводах, используется одномерная постановка с упрощением модели. Особое внимание уделено переходным процессам, существенно зависящим от реологических свойств жидкости. Применяя модель Шульмана–Хусида и метод преобразования Лапласа-Карсона, автор получает аналитические решения, пригодные для численного анализа. Полученные результаты важны как для выявления новых гидродинамических эффектов, так и для сравнения с более сложными моделями течения вязкоупругих жидкостей.*

Ключевые слова: *вискоупругая жидкость, нестационарное течение, плоский канал, переходные процессы, модель Шульмана–Хусида, реологические свойства, уравнение движения, одномерная модель, гидродинамические эффекты, преобразование Лапласа-Карсона.*

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи и методы решения

На основе предложенных в работе [4-5] реологических моделей упруговязкой жидкости будем, решат нестационарные задачи в трубах и каналах, где жидкость полагается ньютоновской или упруговязкой и несжимаемой, а ее движение ламинарным, осесимметричным. В этом случае движения жидкости в трубах с учётом её реологических свойств описываются упрощёнными уравнениями, следующего вида

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy}\right), \quad \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \tau_{xy} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\tau_{k,xy}, \quad \dfrac{\partial \tau_{k,xy}}{\partial t} + \dfrac{g_k}{\lambda_k}\tau_{k,xy} = p_k\dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial p_k}{\partial t} + \dfrac{g_k}{\lambda_k}p_k = \dfrac{\eta_k}{\lambda^2{}_k}f_k. \end{cases} \tag{1}$$

Чтобы решать систему уравнений (1), необходимо сформулировать начальные и граничные условия. Считаем, что при $t=0$, жидкость в начальном состоянии предположим «покоящаяся», т.е.

$$u=0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}=0 \quad \text{при } t=0. \tag{2}$$

$$u=0, \quad при \quad y=h, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad при \quad y=0 \quad u\neq 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}\neq 0 \quad при \quad t\succ 0 \tag{3}$$

Краевые задачи для уравнений (1) с граничными и начальными условиями (2) и (3) удаётся решить в конечном виде только для течений, когда $f_k=1, \quad g_k=1$ в уравнении (1), и для жидкости со спектром времени релаксации

$$\lambda_k=\frac{\lambda}{k^\alpha}, \qquad \eta_k=\frac{\eta}{\xi(\alpha)k^\alpha}.$$

Наиболее сложные течения жидкости с нелинейным спектром времени релаксации требуют привлечения громоздкого аппарата математической физики или численного метода. Линеаризованные уравнения (1) и начальные и граничные условия (2), (3) с применением преобразования Лапласа-Карсона [6], по времени с учетом начальных условий можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial y}-\rho s\overline{u}=\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y}=0, \quad \overline{\tau}_{xy}=\sum\limits_{k=1}^{N}\overline{\tau}_{k,xy}; \\ s\overline{\tau}_{k,xy}+\dfrac{1}{\lambda_k}\overline{\tau}_{k,xy}=\dfrac{\eta_k}{\lambda_k}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} \end{cases} \tag{4}$$

Из уравнения (4) можно найти $\overline{\tau}_{rx}$:

$$\overline{\tau}_{xy}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\eta_k}{1+s\lambda_k}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=\eta(s)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}, \tag{5}$$

где

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\eta_k}{1+s\lambda_k}=\eta(s).$$

Подставляя полученное выражение (5) в уравнение (4), получим

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}-\frac{\rho_0 s}{\eta(s)}\overline{u}=\frac{1}{\eta(s)}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}. \tag{6}$$

INTERNATIONAL INNOVATION AND RESEARCHES
International scientific journal Volume: 2 Issue: 4

В уравнении (6) $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ не зависит от ширины канала, поэтому его решение можно получить в виде тригонометрической функции. Считается, что переменная x - «замороженный» параметр в уравнении:

$$\bar{u} = \frac{1}{\rho\, s}\left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho_0 s}{\eta(s)}}\,y\right)}{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho_0 s}{\eta(s)}}\,h\right)}\right). \qquad (7)$$

Это выражение имеет только простые полюсы

$$s = 0, \quad s = -v\,\frac{\bar{s}_{ni}}{h^2},$$

где $\bar{s}_{ni}$ – корень трансцендентного уравнения

$$\bar{s} + \bar{\eta}(\bar{s})\ (\bar{s})\frac{(2p+1)^2}{2}\pi^2 = 0: \qquad (8)$$

здесь

$$\bar{\eta}(\bar{s}) = \frac{1}{\xi(\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha} - EL\bar{s}}. \qquad (9)$$

есть реологическое уравнение Шульмана-Хусида, где $EL = \frac{v\lambda}{h^2}$. Ее можно решить аналитическим методом в двух случаях, когда $|\lambda s| \ll 1$ или $|\lambda s| \gg 1$.

В первом случае, когда $|\lambda s| \ll 1$ реологическое уравнение обращается уравнению ньютоновской жидкости т.е.

$\bar{\eta}(\bar{s}) = \frac{1}{\xi(\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha} - EL\bar{s}} \approx \frac{1}{\xi(\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} = 1.$ Отсюда, $\eta(s) = \eta\bar{\eta}(\bar{s}) = \eta$ в этом случае все полученные результаты ньютоновской жидкости верны для упруговязкой жидкости, когда реологические уравнение заданы в виде модель Шулмана-Хусида. Во втором случае, когда $|\lambda s| \gg 1$ (8) трансцендентное уравнение при замене выражение $\bar{\eta}(\bar{s})$ его асимптотическим выражением

$$\bar{\eta}(\bar{s}) = \frac{\pi}{\xi(\alpha)\alpha\sin(\pi/\alpha)(\lambda s)^{(1-1/\alpha)}}$$

Тогда (8) при $\alpha = 2$ имеет вид

$$\bar{s}+\frac{\pi}{2\xi(2)(-EL\bar{s})^{\frac{1}{2}}}\frac{(2p+1)^2}{2}\pi^2=0:$$

или $$\bar{s}_{in}=\frac{\pi^2}{4\sqrt[3]{\xi^2(2)EL}}(2n+1)^{4/3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Оканчательное решение будет таким

$$\frac{u(0,t)}{u_{0max}}=\left[1-32\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{\xi^2(2)EL}}{3(2n+1)^2\pi^3\sqrt[3]{2n+1}}e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_n t}\right]$$

Использую полученное решение можно произвести числовые расчеты для модели Шульмана-Хусида.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача нестационарного течения вязкоупругой жидкости в плоском канале с учетом её реологических свойств. Используя модель Шульмана–Хусида и метод преобразования Лапласа-Карсона, получены аналитические выражения, описывающие поведение жидкости в переходных режимах. Проведённый анализ показал, что даже при упрощённой одномерной постановке можно выявить важные гидродинамические особенности, характерные для течений вязкоупругих сред. Полученные результаты могут быть полезны как для дальнейших теоретических исследований, так и для численного моделирования реальных технологических процессов, связанных с нестационарными потоками сложных жидкостей.

Использованные источники:

1. Наврузов К., Хакбердиев Ж.Б. Динамика неньютоновских жидкостей. – Ташкент: Фан", 2000. – 246 с.
2. Наврузов К. Пульсирующее течение упруговязкой жидкости в плоской трубе // Узб. журн. «Проблемы механики», 2002, №1. – С.
3. Шульман З.П. Нестационарные процессы реодинамики и тепломассообмена. – Минск, 1983. – 169 с.
4. Шульман З.П., Хусид Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. – Минск, 1983. – 256 с.
5. Шульман З.П., Алейников С.М., Хусид Б.М. Переходные процессы при сдвиговых течениях вязкоупругой жидкости. 1. Распространение сдвиговой волны. // ИФЖ, 1982, т. 42, №6. – С. 992-1000.

6. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехиздат, 1956. – 520 с.
7. Файзуллаев Д.Ф., Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих потоков, – Ташкент, “Фан”,1986. – 192 с.
8. Наврузов К. Биомеханика крупных кровеносных сосудов. – Ташкент, “Fan va texnologiya”, 2011. – 144 с.
9. Шукурова, У. А., & Бекжанова, О. Е. (2016). Показатели цитокинового профиля у больных красным плоским лишаем слизистой полости рта. Знание, (10-1), 67-70.
10. Нурмухамедов, А. М., Абдуллаева, С. Ш., Абдуллаев, А. Ш., Нодирханова, С. И., & Хаджибаев, А. Ш. (2025). Исследование физико-механических свойств теста для национальных мучных изделий с начинкой. American journal of education and learning, 3(4), 176-181.