INTERNATIONAL INNOVATION AND RESEARCHES
International scientific journal Volume: 1 Issue: 3

BIR JINSLI BO‘LMAGAN ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASINI FURYE (O‘ZGARUVCHILARNI AJIRATISH) USULI YORDAMIDA YECHISH

Mamatova Zilolaxon Xabibulloxonovna
Farg‘ona davlat universiteti dotsenti, p.f.f.d. (PhD)

Mo‘ydinova Odinaxon Alisher qizi
Farg‘ona davlat universiteti Amaliy matematika yo‘nalishi talabasi
mmatematika261@gamil.com

Annontatsiya. *Bir jinsli parobolik tipli tenglamalarni yechishning juda ko‘p usullarini ko‘rganmiz. Maqolada bir jinsli bo‘lmagan jismning ya'ni, sterjenning issiqlik manbaalari ta'siri kuzatilgan holi ko‘rib chiqilgan. Maqolada sterjenda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini Furye usuli ya'ni, o‘zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida yechishni analitik va sonli usullarni qo‘llash yordamida algoritmi batafsil yoritilgan.*

Kalit so’zlar: *issiqlik tarqalishi, sterjen, boshlang‘ich va chegaraviy shartlar, Shturm-Liuvill formulasi, Eyler formulasi, Furye qatori, nuqtaviy issiqlik manbai.*

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ФУРЬЕ (РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ)

Аннотация. *Мы видели много способов решения однородных параболических уравнений. В статье наблюдалось влияние источников тепла неоднородного тела, то есть осетра. В статье подробно описан алгоритм решения уравнения теплообмена в осетре методом Фурье, то есть методом разделения переменных, с использованием аналитических и численных методов.*

Ключевые слова: *диффузия тепла, стерген, начальные и граничные условия, формула Штурма-Лиувилля, формула Эйлера, ряд Фурье, точечный источник тепла.*

SOLUTION OF THE INHOMOGENOUS HEAT DISTRIBUTION EQUATION USING THE FOURIER (SEPARATION OF VARIABLES) METHOD

Abstract. *We have seen many ways to solve homogeneous parabolic equations. In the article, the effect of heat sources of a non-homogeneous body, that is, a sturgeon, was observed. The article describes in detail the algorithm for solving the equation of heat transfer in the sturgeon using the Fourier method, that is, the method of separation of variables, using analytical and numerical methods.*

Key words: *heat diffusion, stergen, initial and boundary conditions, Sturm-Liouville formula, Eyler's formula, Furye series, point heat source.*

KIRISH

Tabiatda aksariyat hollarda voqeylik harakat bilan bog‘liq bo‘lsa, tabiiy voqiylikni matematik modelini tuzib uni yechishdiffernsiyal tenglamalarni yechishga keltiriladi. Ko‘p xollarda issiqlik tarqalishi diffuziya to‘lqin tarqalishi tor tebranishi va hokazo hollarni matemanik modeli matematik fizika tenglamalari issiqlik tarqalishi tenglamasi (parabolik) to‘lqin tarqalishi tenglamasi (elliptik), tor tebranishi tenglamasi (giperbolik) kabi tenglamalar qatnashgan masalalarni yechishga keltiriladi.

Biz bu maqolada chekli uzunlikdagi sterjenda qo‘yilgan aralash masalalarning limitik holi sifatida aniqlangan chegaralanmagan uzunlikdagi sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi xuddi giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda qo‘llanilgan o‘zgaruvchilarni almashtirishyoki Furye usuli yordamida topilib, yechim Puasson integrali deb ataluvchi integral shaklida tasvirlanishini o‘rgandik.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Klassik olimlar: Krasovskiy Tahonov, A.A. Samariskiy, Butkavskiy.A.G‘. Marguk va hokazo olimlar shu masalalar bilan shug‘ullanuvchilar bo‘lishgan.

Texnologik yechimlar effettuvligi ko‘p hollarda issiqlik almashinuvi holatini aniq va chuqur o‘rganishga bog‘liq. Bundan tashqari ko‘proq ekspremental izlanishlar axamiyat berilmoqda. Izlanishlar shuni ko‘rsatadiki yuqoridagilarga asos bo‘lib issiqlik tarqalishi teskari masalasini yechish hizmat qiladi va aksariyat hollarda yechish usuli natijani olishni yagona usuli bo‘ladi teskari masalalarni yechish usuli nochiziqli nostatsionar qiyin bo‘lgan issiqlik almashinish protsesslarini o‘rganishga imkoniyat beradi. Bu usulda axborotlar ko‘lami keng bo‘lib voqeylikka imkon qadar yaqin eksperimental izlanishlarga imkon beradi.

Bir jinsli parobolik tipli tenglamalarni Furye (o‘zgaruvchilarni ajratish) usuli yordamida yechish usulidan foydalanib issiqlik tarqalishning bir jinsli bo‘lmagan ya'ni, sterjenda issiqlik manbaalari ta'siri kuzatilgan holini ko‘rib chiqamiz:

$$U_t = a^2U_{xx} + bU_x + cU + f(x,t), 0 < x < l, t > 0 \tag{1}$$

bir jinsli bo‘lmagan issiqlik tarqalish tenglamasini va

$$U(x,0) = \varphi(x), 0 < x < l \tag{2}$$

boshlang‘ich hamda

$$U(0,t) = 0, U(l,t) = 0, t \geq 0 \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtaga xos bir jinsli bo‘lmagan tenglama yechimi ushbu $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{a^2\pi^2}{l^2} > c$ shart asosida topilsin (aynan nolmas). Bu tenglama yechimini

$$U(x,t) = T(t)X(x) \tag{4}$$

ko‘rinishida qidiramiz. (4) ni (1) ga qo‘yamiz:

$$T'(t)X(x) = a^2\, T(t)X''(x) + bT(t)X'(x) + cT(t)X(x). \tag{5}$$

(5) ifodani a^2 T(t)X(x)ga bo‘lamiz.

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{bX'(x)}{a^2X(x)} + \frac{c}{a^2} \tag{6}$$

(6) ning chap va oʻng tomonini alohida oʻzgaruvchilardan iborat boʻlgani uchun (6) tenglik

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} - \frac{c}{a^2} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{bX'(x)}{a^2X(x)} = -\lambda \tag{7}$$

yoki

$$T'(t) - cT(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{8.1}$$

$$X''(x) + \frac{bX'(x)}{a^2} + \lambda X(x) = 0 \tag{8.2}$$

koʻrinishlarga ega boʻladi.

Bu tenglamalarni (2)-(3)-shartlarda qarasak, oddiy differensial tenglama uchun quyidagi Shturm-Liuvill masalasini hosil qilamiz:

$$T'(t) - cT(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{I}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \dfrac{bX'(x)}{a^2} + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases} \tag{II}$$

Navbatda (I) va (II) Shturm-Liuvill masalalarini yechamiz. Dastlab (II) ni yechamiz. (II) ning yechimi

$$X(x) = e^{kx} \tag{9}$$

bo‘1sin. Bu yerda k hozircha noma'lum son-parametr. (9) ni (II) ning 1-tenglamasiga qoʻyamiz.

$$k^2e^{kx} + \frac{bk}{a^2}e^{kx} + \lambda e^{kx} = 0$$

$$k = \frac{-\frac{b}{a^2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^4} - 4\lambda}}{2} \tag{10}$$

$$X(x) = C_1 e^{\frac{-\frac{b}{a^2} + \sqrt{\frac{b^2}{a^4} - 4\lambda}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-\frac{b}{a^2} - \sqrt{\frac{b^2}{a^4} - 4\lambda}}{2}x} \tag{11}$$

Bizda ildiz ostidagi ifoda qiymatining ishorasi aniq boʻlmaganligi sababli, keyingi qadamlarda shart berib ishlaymiz.

1-hol.

$\frac{b^2}{a^4} - 4\lambda > 0, \lambda < \frac{b^2}{a^4}$ shart oʻrinli boʻlganda koʻrib chiqamiz.

X (0) = 0 chegaraviy shartni (11) tenglamaga qo‘ysak, $X(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2$=0; $C_2 = -C_1$ kelib chiqadi. Bundan ko‘rinadiki

$$X(x) = C_1 e^{\frac{-\frac{b}{a^2}+\sqrt{\frac{b^2}{a^4}-4\lambda}}{2}x} - C_1 e^{\frac{-\frac{b}{a^2}-\sqrt{\frac{b^2}{a^4}-4\lambda}}{2}x} \qquad (12)$$

$X(l) = 0$ chegaraviy shartni (12) tenglamaga qo‘yib,

$$X(l) = C_1 e^{\frac{-\frac{b}{a^2}+\sqrt{\frac{b^2}{a^4}-4\lambda}}{2}l} - C_1 e^{\frac{-\frac{b}{a^2}-\sqrt{\frac{b^2}{a^4}-4\lambda}}{2}l} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. $e^{\frac{-\frac{b}{a^2}+\sqrt{\frac{b^2}{a^4}-4\lambda}}{2}l} - e^{\frac{-\frac{b}{a^2}-\sqrt{\frac{b^2}{a^4}-4\lambda}}{2}l} \neq 0$ ekanligidan $C_1 = 0$ hosil bo‘ladi. $C_2 = -C_1$ ekanidan $C_2 = 0$ bo‘ladi.

Hosil bo‘lgan C_1, C_2 ning qiymatini (11) tenglamaga qo‘yib, $X(x) = 0$ ifodani hosil qilamiz. Bizga nolmas yechim kerakligi sababli bu natijani qabul qilmay, keyingi holatni ko‘ramiz.

2-hol.

$\frac{b^2}{a^4} - 4\lambda = 0, \lambda = \frac{b^2}{a^4}$ shart o‘rinli bo‘lganda ko‘rib chiqamiz.

$$X(x) = C_1 e^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}x} = e^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}x}(C_1 + C_2) \qquad (13)$$

X (0) = 0 va X (l) = 0 chegaraviy shartlarni (13) tenglamaga qo‘ysak, $X(0) = C_1 + C_2$=0 va $X(l) = e^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}l}(C_1 + C_2) = 0$ tengliklar hosil bo‘ladi. $C_1 + C_2$=0 dan X(x)=0 ekanligi kelib chiqadi. Bizga nolmas yechim kerakligi sababli bu natijani qabul qilmay, keying holatni ko‘ramiz.

3-hol.

$\frac{b^2}{a^4} - 4\lambda < 0, \lambda > \frac{b^2}{a^4}$ shart o‘rinli bo‘lganda ko‘rib chiqamiz.

$\sqrt{\frac{b^2}{a^4} - 4\lambda}$=i$\sqrt{4\lambda - \frac{b^2}{a^4}}$ deb almashtirsak, (11) tenglama quyidagi ko‘rinishga o‘tadi:

$$X(x) = C_1 e^{\frac{-\frac{b}{a^2}+\sqrt{4\lambda-\frac{b^2}{a^4}}i}{2}x} + C_2 e^{\frac{-\frac{b}{a^2}-\sqrt{4\lambda-\frac{b^2}{a^4}}i}{2}x} \qquad (14)$$

Eyler formulasiga ko‘ra ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$) (14) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$X(x) = Ae^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{4\lambda-\frac{b^2}{a^4}}}{2}x + Be^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{4\lambda-\frac{b^2}{a^4}}}{2}x \qquad (15)$$

$X(0) = 0$ va $X(l) = 0$ chegaraviy shartlarni (15) tenglamaga qo‘ysak, X(0)=A=0 va $X(l) = Be^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}l}\sin\frac{\sqrt{4\lambda-\frac{b^2}{a^4}}}{2}l = 0$ tengliklar hosil bo‘ladi. Bundan $B \neq 0, e^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}l} \neq 0$ ekanligidan, $\sin\frac{\sqrt{4\lambda-\frac{b^2}{a^4}}}{2}l = 0$ bo‘ladi. Bundan λ ni topamiz:

$$\lambda = \frac{b^2}{4a^4} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in N$$

A=0 va λ ma’lumligidan (15) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$X(x) = Be^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{4\lambda-\frac{b^2}{a^4}}}{2}x \qquad (16)$$

λ ni (16) tenglikdagi o‘rniga qo‘ysak, natijada (16) tenglik n ga bog‘liq holda quyidagicha ko‘rinishga o‘tadi:

$$X_n(x) = Be^{\frac{-\frac{b}{a^2}}{2}x}\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (17)$$

(16) tenglikdan foydalanib, normallash orqali, ya’ni, quyidagi formula orqali B ni topamiz:

$$\int_0^l X^2(x)dx = 1$$

Bundan $B = 2a^3\pi n\sqrt{\frac{2(1-e^{-\frac{b}{a^2}l})}{b(4a^4\pi^2n^2+b^2l^2)}}$ bo‘ladi.

Endi (I) ni yechamiz. Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$T_n'(t) - cT_n(t) + \lambda a^2 T_n(t) = f_n(t) \qquad (18)$$

Bu yerda $f_n(t) = \int_0^l f(x,t)X(x)dx.$

(18) tenglamani bir jinslimas deb faraz qilib, yechib

$$T_n(t) = a_n e^{(c-\lambda a^2)t} \qquad (19)$$

ushbu (19) natijaga ega bo‘lamiz. Tenglamani o‘zgarmasni variatsiyalash usuli orqali yechib (19) ni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$T_n(t) = a_n(0)e^{(c-\lambda a^2)t} + \int_0^t f_n(\tau)e^{(c-\lambda a^2)(t-\tau)}d\tau \qquad (20)$$

(17) va (20) tengliklarni (4) ga olib borib qo‘ysak, ushbu

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}2a^3\pi n\sqrt{\frac{2\left(1-e^{-\frac{b}{a^2}l}\right)}{b(4a^4\pi^2n^2+b^2l^2)}}e^{-\frac{\frac{b}{a^2}}{2}x}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot$$
$$\left[a_n(0)e^{(c-\lambda a^2)t}+\int_0^t f_n(\tau)e^{(c-\lambda a^2)(t-\tau)}d\tau\right] \qquad (21)$$

yechim hosil bo‘ladi. (21) tenglikni (2) boshlang‘ich shartga bo‘ysundirish orqali $a_n(0)$ koeffitsiyentni topamiz:

$$U(x,0)=\varphi(x);\ a_n(0)=\int_0^l X_n(x)\varphi(x)dx$$

Natijada, ushbu yechimga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} U(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}2a^3\pi n\sqrt{\frac{2\left(1-e^{-\frac{b}{a^2}l}\right)}{b(4a^4\pi^2n^2+b^2l^2)}}e^{-\frac{\frac{b}{a^2}}{2}x}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot \\ \left[a_n(0)e^{(c-\lambda a^2)t}+\int_0^t f_n(\tau)e^{(c-\lambda a^2)(t-\tau)}d\tau\right] \\ a_n(0)=\int_0^l X_n(x)\varphi(x)dx \end{cases}$$

XULOSA

Biz bu maqolamizda chekli uzunlikdagi sterjenda qo‘yilgan aralash masalalarning limitik holi sifatida aniqlagan chegaralanmagan uzunlikdagi sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi xuddi giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda qo‘llanilgan o‘zgaruvchilarni almashtirish yoki Furye usuli yordamida topilishini ko‘rdik.

Foydalanilgan adabiyotlar ro’yxati:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. Наука, 1970. - 736 с.
2. M.S.Salohiddinov. Matematik fizika tenglamalari. Toshkent. "O‘qituvchi" - 2002.
3. Рустамов М., Иргашева У. Задача восстановления скоростьизменение температуры по косвенным наблюдениям. Scientific journal "Research and education". (ISSN:2181-3191) May - 2022. 22-29 8 стр.
4. http://researchedu.org/index.php/rae/article/view/777/902
5. https://staff.tiiame.uz/storage/users/683/presentations/MiV2qTCs8R7z2mP9B4EdpsBIvNl256q1p7cvRvYp.pdf