МЕТОД ЭЙЛЕРА. УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ

Усмонов Махсуд Тулқин ўғли
maqsudu32@gmail.com
Ташкентский университет информационных технологий
Каршинский филиал

Аннотация: В данной статье приведена информация об основах приближённых вычислений в этом разделе математического анализа.

Ключевые слова: Идея методов Эйлера и Рунге-Кутты, решение дифференциальных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x; y)$, для которого требуется найти частное решение, соответствующее начальному условию $f(x_0) = y_0$. Что это значит? Это значит, нам нужно найти функцию $y^* = f(x)$ (предполагается её существование), которая удовлетворяет данному дифф. уравнению, и график которой проходит через точку $M(x_0; y_0)$.

Но вот незадача - переменные в уравнении $y' = f(x; y)$ разделить невозможно. Никакими известными науке способами. А если и возможно, то получается неберущийся интеграл. Однако частное-то решение существует! И здесь на помощь приходят методы приближенных вычислений, которые позволяют с высокой (а зачастую с высочайшей) точностью «сымитировать» функцию $y^* = f(x)$ на некотором промежутке.

Идея методов Эйлера и Рунге-Кутты состоит в том, чтобы заменить фрагмент графика $y^* = f(x)$ ломаной линией, и сейчас мы узнаем, как эта идея реализуется на практике.

Задание

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + 2y = x^2$, соответствующее начальному условию $y(0) = 1$, методом Эйлера на отрезке $[0; 1]$ с шагом $h = 0{,}1$. Построить таблицу и график приближённого решения.

Разбираемся. Во-первых, перед нами обычное линейное уравнение, которое можно решить стандартными способами, и поэтому очень трудно устоять перед соблазном сразу же найти точное решение:

$y^* = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ - желающие могут выполнить проверку и убедиться, что данная функция удовлетворяет начальному условию $y(0)=1$ и является корнем уравнения $y' + 2y = x^2$.

Что нужно сделать? Нужно найти и построить ломаную, которая приближает график функции $y^* = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ на промежутке $[0;1]$. Поскольку длина этого промежутка равна единице, а шаг составляет $h = 0{,}1$, то наша ломаная будет состоять из 10 отрезков:

$M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_9M_{10}$

причём, точка $M_0(x_0; y_0) = M_0(0; 1)$ уже известна - она соответствует начальному условию $y(0)=1$. Кроме того, очевидны «иксовые» координаты других точек:

$M_1(0{,}1; y_1), M_2(0{,}2; y_2), M_3(0{,}3; y_3), \ldots, M_9(0{,}9; y_9), M_{10}(1; y_{10})$

Осталось найти $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_9, y_{10}$. Никакого дифференцирования и интегрирования - только сложение и умножение! Каждое следующее «игрековое» значение получается из предыдущего по простой рекуррентной формуле:

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i)$

Представим дифференциальное уравнение $y' + 2y = x^2$ в виде $y' = f(x; y)$:

$y' = x^2 - 2y$

Таким образом: $f(x; y) = x^2 - 2y$

«Раскручиваемся» от начального условия $y(0)=1$:

$x_0 = 0, \quad y_0 = 1$

$f(x_0; y_0) = f(0; 1) = 0^2 - 2 \cdot 1 = -2$

$hf(x_0; y_0) = 0{,}1 \cdot (-2) = -0{,}2$

Понеслось:

$x_1 = 0{,}1, \quad y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$f(x_1; y_1) = f(0{,}1; 0{,}8) = (0{,}1)^2 - 2 \cdot 0{,}8 = 0{,}01 - 1{,}6 = -1{,}59$

$hf(x_1; y_1) = 0{,}1 \cdot (-1{,}59) = -0{,}159$

$x_2 = 0{,}2, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 0{,}8 - 0{,}159 = 0{,}641$

$f(x_2; y_2) = f(0{,}2; 0{,}641) = (0{,}2)^2 - 2 \cdot 0{,}641 = 0{,}04 - 1{,}282 = -1{,}242$

$hf(x_2; y_2) = 0{,}1 \cdot (-1{,}242) = -0{,}1242$

$x_3 = 0{,}3, \quad y_3 = y_2 + hf(x_2; y_2) = 0{,}641 - 0{,}1242 = 0{,}5168$

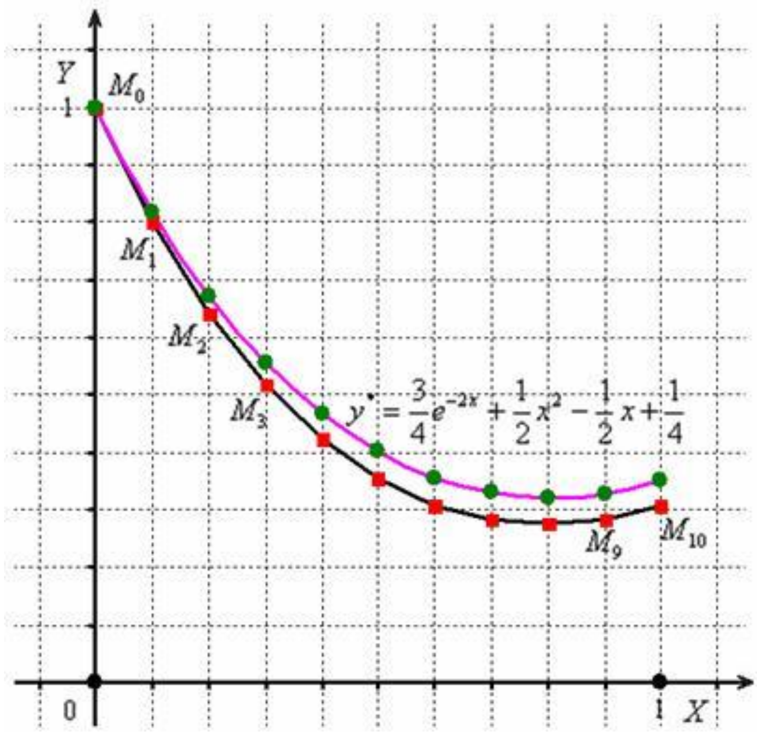
и так далее - до победного конца.

Результаты вычислений удобно заносить в таблицу:

i	x_i	y_i	$f(x_i;\, y_i)$	$hf(x_i;\, y_i)$
0	0	1	-2	-0,2
1	0,1	0,8	-1,59	-0,159
2	0,2	0,641	-1,242	-0,1242
3	0,3	0,5168	-0,944	-0,0944
4	0,4	0,42244	-0,685	-0,0685
5	0,5	0,35395	-0,458	-0,0458
6	0,6	0,30816	-0,256	-0,0256
7	0,7	0,28253	-0,075	-0,0075
8	0,8	0,27502	0,09	0,009
9	0,9	0,28402	0,242	0,0242
10	1	0,30821	0,3836	0,03836

А сами вычисления автоматизировать в Экселе - потому что в математике важен не только победный, но ещё и быстрый конец:)

По результатам 2-го и 3-го столбцов изобразим на чертеже 11 точек $M_i(x_i;\, y_i)$ и 10 отрезков, соединяющих смежные точки. Для сравнения я построю график точного частного решения $y^* = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$:



Существенным недостатком простого метода Эйлера является слишком большая погрешность, при этом легко заметить, что погрешность имеет тенденцию накапливаться - чем дальше мы уходим от точки M_0, тем преимущественно больше становится расхождение между приближением и истиной. Это объяснимо самим принципом, который Эйлер положил в основу своего метода: отрезки $M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_9M_{10}$ параллельны соответствующим касательным к графику функции $y^* = f(x)$ в точках

$x_0 = 0;\ x_2 = 0{,}1;\ x_2 = 0{,}2, \ldots, x_{10} = 1$. Данный факт, кстати, тоже хорошо просматривается по чертежу.

Как можно улучшить приближение? Первая мысль - измельчить разбиение. Разделим отрезок $[0;1]$, например, на 20 частей. Тогда шаг составит: $h = \frac{1-0}{20} = 0{,}05$, и совершенно понятно, что ломаная из 20 звеньев заметно точнее приблизит частное решение.

Усовершенствованный метод Эйлера

Рассмотрим тот же самый пример: дифференциальное уравнение $y' = x^2 - 2y$, частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$, промежуток $[0;1]$ и его разбиение на 10 частей

($h = 0{,}1$ - длина каждой части).

Цель усовершенствования состоит в том, чтобы приблизить «красные квадратики» ломаной $M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots M_9 M_{10}$ к соответствующим «зелёным точкам» точного решения $y^* = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

И идея модификации такова: отрезки $M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_9M_{10}$ должны быть параллельны касательным, которые проведены к графику функции $y^* = f(x)$ не на левых краях, а «посерединке» интервалов разбиения. Что, естественно, улучшит качество приближения.

Алгоритм решения работает в том же русле, но формула, как нетрудно догадаться, усложняется:

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где $\Delta y_i = hf\left(x_i + \frac{h}{2};\ y_i + \frac{h}{2}f(x_i;\ y_i)\right)$

Плясать вновь начинаем от частного решения $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ и сразу же находим 1-й аргумент «внешней» функции:

$$x_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$$

Далее следуют уже знакомые по предыдущему параграфу вычисления $f(x_0;\ y_0) = f(0;\ 1) = 0^2 - 2 \cdot 1 = -2$, после чего можно рассчитать 2-й аргумент «внешней» функции: $y_0 + \frac{h}{2}f(x_0;\ y_0) = 1 + 0{,}05 \cdot (-2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Теперь находим нашего «монстра», который на поверку оказался не таким уж и страшным - обратите внимание, что это та же функция $f(x;\ y) = x^2 - 2y$, вычисленная в другой точке:

$$f\left(x_0+\frac{h}{2};\, y_0+\frac{h}{2}f(x_0;\, y_0)\right)=f(0{,}05;\, 0{,}9)=(0{,}05)^2-2\cdot 0{,}9=0{,}0025-1{,}8=-1{,}7975$$

Умножаем результат на шаг разбиения:

$$\Delta y_0=hf\left(x_0+\frac{h}{2};\, y_0+\frac{h}{2}f(x_0;\, y_0)\right)=0{,}1\cdot(-1{,}7975)=-0{,}17975$$

Таким образом: $y_1=y_0+\Delta y_0=1-0{,}17975=0{,}82025$

Алгоритм заходит на второй круг, не поленюсь, распишу его подробно:

рассматриваем пару $x_1=0{,}1;\, y_1=0{,}82025$ и находим 1-й аргумент «внешней» функции:

$$x_1+\frac{h}{2}=0{,}1+0{,}05=0{,}15$$

Рассчитываем $f(x_1;\, y_1)=f(0{,}1;\, 0{,}82025)=(0{,}1)^2-2\cdot 0{,}82025=0{,}01-1{,}6405=-1{,}6305$

и находим её 2-й аргумент: $y_1+\frac{h}{2}f(x_1;\, y_1)=0{,}82025+0{,}05\cdot(-1{,}6305)=0{,}738725$

Вычислим значение:

$$f\left(x_1+\frac{h}{2};\, y_1+\frac{h}{2}f(x_1;\, y_1)\right)=f(0{,}15;\, 0{,}738725)=(0{,}15)^2-2\cdot 0{,}738725=-1{,}45495$$

и его произведение на шаг:

$$\Delta y_1=0{,}1\cdot(-1{,}45495)=-0{,}145495$$

Таким образом: $y_2=y_1+\Delta y_1=0{,}82025-0{,}145495=0{,}674755$

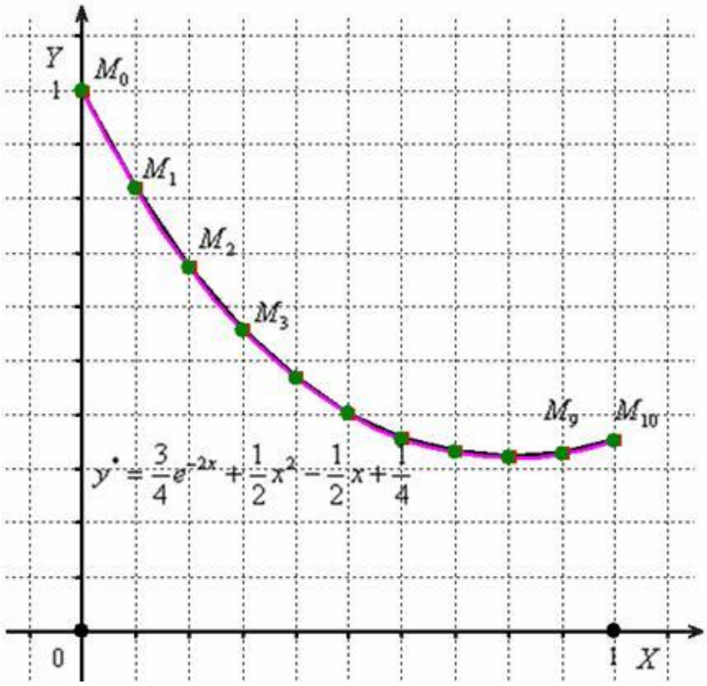
Далее рассматриваем пару $x_2=0{,}2;\, y_2=0{,}674755$ и т.д.

Вычисления разумно провести в Экселе (растиражировав формулы по той же схеме - см. видеоролик выше), а результаты свести в таблицу:

i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;\, y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;\, y_i)$	$f\left(x_i+\frac{h}{2};\, y_i+\frac{h}{2}f(x_i;\, y_i)\right)$	Δy_i
0	0	1	0,05	-2	0,9	-1,7975	-0,17975
1	0,1	0,82025	0,15	-1,6305	0,738725	-1,45495	-0,145495
2	0,2	0,674755	0,25	-1,30951	0,609280	-1,156059	-0,115606
3	0,3	0,559149	0,35	-1,028298	0,507734	-0,892968	-0,089297
4	0,4	0,469852	0,45	-0,779705	0,430867	-0,659234	-0,065923
5	0,5	0,403929	0,55	-0,557858	0,376036	-0,449572	-0,044957
6	0,6	0,358972	0,65	-0,357943	0,341074	-0,259649	-0,025965
7	0,7	0,333007	0,75	-0,176014	0,324206	-0,085912	-0,008591
8	0,8	0,324416	0,85	-0,008831	0,323974	0,074552	0,007455
9	0,9	0,331871	0,95	0,146259	0,339184	0,224133	0,022413
10	1	0,354284	1,05	0,291432	0,368856	0,364789	0,036479

Числа целесообразно округлять до 4-5-6 знаков после запятой. Нередко в условии той или иной задачи есть прямое указание, с какой точностью следует проводить округление. Я подровнял сильно «хвостатые» значения до 6 знаков.

По результатам 2-го и 3-го столбцов (слева) построим ломаную $M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots M_9 M_{10}$, и для сравнения я снова приведу график точного решения $y^* = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$:



Результат существенно улучшился! - красные квадратики $M_i(x_i; y_i)$ практически «спрятались» за зелёными точками точного решения.

Классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Его цель добиться ещё большего приближения «красных квадратиков» к «зелёным точкам». Вы спросите, куда ещё ближе? Во многих, в частности физических, исследованиях бывает принципиально важен 10-й, а то и 50-й точный знак после запятой. Нет, такой точности можно достичь и простым методом Эйлера, но на сколько частей придётся разбить промежуток $[0; 1]$?!

И, как правильно подсказывает заголовок, при использовании метода Рунге-Кутты на каждом шаге нам придётся вычислить значение функции $f(x; y) = x^2 - 2y$ 4 раза (в отличие от двукратного вычисления в предыдущем параграфе). Но задача эта вполне и вполне подъёмная если нанять китайцев.

Каждое следующее «игрековое» значение получается из предыдущего - ловим формулы:

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где $\Delta y_i = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, где:

$$k_1 = f(x_i;\, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2};\, y_i + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2};\, y_i + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h;\, y_i + hk_3)$$

$$x_0 = 0,\, y_0 = 1$$

$$k_1 = f(x_0;\, y_0) = f(0;1) = 0^2 - 2\cdot 1 = -2$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2};\, y_0 + \frac{hk_1}{2}\right) = f\left(0 + \frac{0{,}1}{2};\, 1 + \frac{0{,}1\cdot(-2)}{2}\right) = f(0{,}05;\, 0{,}9) = (0{,}05)^2 - 2\cdot 0{,}9 = -1{,}7975$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2};\, y_0 + \frac{hk_2}{2}\right) = f\left(0{,}05;\, 1 + \frac{0{,}1\cdot(-1{,}7975)}{2}\right) = f(0{,}05;\, 0{,}9101) = (0{,}05)^2 - 2\cdot 0{,}9101 = -1{,}81775$$

$$k_4 = f(x_0 + h;\, y_0 + hk_3) = f(0 + 0{,}1;\, 1 + 0{,}1\cdot(-1{,}81775)) = f(0{,}1;\, 0{,}818225) = (0{,}1)^2 - 2\cdot 0{,}818225 = -1{,}62645$$

$$\Delta y_0 = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \frac{0{,}1}{6}\cdot(-2 + 2\cdot(-1{,}7975) + 2\cdot(-1{,}81775) - 1{,}62645) \approx -0{,}180949$$

Таким образом:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \approx 1 - 0{,}180949 = 0{,}819051$$

Первая строка запрограммирована, и я копирую формулы по образцу:

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4	Δy_i
0	0	1	-2	-1,7975	-1,81775	-1,62645	-0,180949
1	0,1	0,819051	-1,628102	-1,452792	-1,470323	-1,304037	-0,146306
2	0,2	0,672745	-1,305489	-1,152440	-1,167745	-1,021940	-0,116130
3	0,3	0,556615	-1,023229	-0,888406	-0,901889	-0,772852	-0,089611
4	0,4	0,467004	-0,774007	-0,654106	-0,666096	-0,550788	-0,066087
5	0,5	0,400917	-0,551834	-0,444150	-0,454919	-0,350850	-0,045014
6	0,6	0,355903	-0,351806	-0,254126	-0,263894	-0,169028	-0,025948
7	0,7	0,329955	-0,169911	-0,080419	-0,089369	-0,002037	-0,008525
8	0,8	0,321430	-0,002860	0,079926	0,071648	0,152811	0,007552
9	0,9	0,328982	0,152037	0,229333	0,221604	0,297716	0,022527
10	1	0,351509	0,296983	0,369784	0,362504	0,434482	0,036601

В чертеже нет смысла, поскольку он уже не показателен. Давайте лучше проведём аналитическое сравнение точности трёх методов, ибо когда известно точное решение $y^* = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, то грех не сравнить. Значения функции $y^* = f(x)$ в узловых точках элементарно рассчитываются в том же Экселе - один раз забиваем формулу $y_0^* = f(x_0) = f(0) = \frac{3}{4}e^{-2\cdot 0} + \frac{1}{2}\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}$ и тиражируем её на остальные x_i.

В нижеследующую таблицу я сведу значения y_i (для каждого из трёх методов) и соответствующие абсолютные погрешности $|y_i^* - y_i|$ приближённых вычислений:

i	Точные значения y_i^*	Метод Эйлера		Усовершенствованный метод Эйлера		Метод Рунге-Кутты 4-го порядка	
		y_i	$\lvert y_i^* - y_i \rvert$	y_i	$\lvert y_i^* - y_i \rvert$	y_i	$\lvert y_i^* - y_i \rvert$
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0,819048	0,8	0,019048	0,82025	0,001202	0,819051	0,000003
2	0,672740	0,641	0,031740	0,674755	0,002015	0,672745	0,000005
3	0,556609	0,5168	0,039809	0,5591491	0,002540	0,556615	0,000006
4	0,466997	0,42244	0,044557	0,46985226	0,002856	0,467004	0,000007
5	0,400910	0,353952	0,046958	0,40392885	0,003019	0,400917	0,000007
6	0,355896	0,308162	0,047734	0,35897166	0,003076	0,355903	0,000007
7	0,329948	0,282529	0,047418	0,33300676	0,003059	0,329955	0,000008
8	0,321422	0,275023	0,046399	0,32441554	0,002993	0,321430	0,000007
9	0,328974	0,284019	0,044955	0,33187075	0,002897	0,328982	0,000007
10	0,351501	0,308215	0,043286	0,35428401	0,002783	0,351509	0,000007

Как видите, метод Рунге-Кутты даёт уже 4-5 верных знака после запятой по сравнению с 2 верными знаками усовершенствованного метода Эйлера! И это не случайность:

- Погрешность «обычного» метода Эйлера не превосходит шага разбиения. И в самом деле - взгляните на самый левый столбец погрешностей $\lvert y_i^* - y_i \rvert$ - там после запятых только один ноль, что и говорит нам о точности 0,1.

- Усовершенствованный метод Эйлера гарантирует точность: $h^2 = (0{,}1) = 0{,}01$ (смотрим на 2 нуля после запятой в средней колонке погрешностей).

- И, наконец, классический метод Рунге-Кутты обеспечивает точность $h^4 = (0{,}1)^4 = 0{,}0001$.

Изложенные оценки погрешностей строго обосновывается в теории.

В частности, существует и другие, более точные модификации метода Рунге-Кутты. Количественный путь, как уже отмечалось, состоит в уменьшении шага, т.е. в разбиении отрезка $[0;1]$ на большее количество n промежуточных отрезков. И с увеличением этого количества ломаная $M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1} M_n$ всё больше и больше будет походить на график точного решения $y^* = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ и в пределе - совпадёт с ним.

В математике это свойство называется спрямляемостью кривой. К слову (небольшой оффтоп), «спрямить» удаётся далеко не всё - рекомендую прочитать интереснейшую статью о фракталах, в которых уменьшение «участка исследования» не влечёт за собой упрощение объекта исследования.

Так получилось, что я разобрал всего лишь одно дифференциальное уравнение и поэтому пара дополнительных замечаний. Что ещё нужно иметь в виду на практике? В условии задачи вам может быть предложен другой отрезок и другое разбиение, причём иногда встречается следующая формулировка: «найти методом… …на промежутке $[0{,}5; 1{,}2]$, разбив его на 5 частей». В этом случае нужно найти шаг разбиения $h = \frac{1,2 - 0,5}{5} = \frac{0,7}{5} = 0,14$, после чего придерживаться обычной схемы решения. Кстати, начальное условие должно быть такого вида: $y(0,5) = y_0$, то есть «икс нулевое», как правило, совпадает с левым концом отрезка. Образно говоря, ломаная всегда «выходит» из точки $M(x_0; y_0)$.

Безусловным достоинством рассмотренных методов, является тот факт, что они применимы к уравнениям $y' = f(x; y)$ с очень сложной правой частью.

Использованная литература

1. Киселёв, Андрей Петрович // Большая советская энциклопедия : [в 30 т.] / гл. ред. А. М. Прохоров. - 3-е изд. - М. : Советская энциклопедия, 1969-1978.

2. Андронов И. К., А. П. Киселев., «Математика в школе», 1941, № 2

3. Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселев, «Математика в школе», 1948, № 4

4. Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.

5. Моргулис А. Я., Тростников В. Законодатель школьной математики // Наука и жизнь. 1968. № 1

6. Пыльнев-Рогачёв, Лунёва М. И. Служитель «царицы-наук» // Кольцовский сквер. 2002. № 3