ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

Усмонов Махсуд Тулқин ўғли
maqsudu32@gmail.com
Ташкентский университет информационных технологий
Каршинский филиал

Аннотация: В данной статье рассмотрены гипербола и парабола, их канонические уравнения.

Ключевые слова: Гипербола, каноническое уравнение гиперболы

Гипербола и её каноническое уравнение

Общая структура изложения материала будет напоминать предыдущий параграф. Начнём с общего понятия гиперболы и задачи на её построение.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a, b - положительные действительные числа. Обратите внимание, что в отличие от эллипса, здесь не накладывается условие $a>b$, то есть, значение «а» может быть и меньше значения «бэ».

У гиперболы две симметричные ветви. У гиперболы две асимптоты.

Данными свойствами обладает любая гипербола, и сейчас мы с неподдельным восхищением заглянем в декольте этой линии:

Пример 4

Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2-4y^2=20$

Решение: на первом шаге приведём данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Пожалуйста, запомните типовой порядок действий. Справа необходимо получить «единицу», поэтому обе части исходного уравнения делим на 20:

$$\frac{5x^2-4y^2}{20}=\frac{20}{20}$$

$$\frac{5x^2}{20}-\frac{4y^2}{20}=1$$

Здесь можно сократить обе дроби, но оптимальнее сделать каждую из них трёхэтажной:

$$\frac{x^2}{\frac{20}{5}}-\frac{y^2}{\frac{20}{4}}=1$$

И только после этого провести сокращение:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

Выделяем квадраты в знаменателях:

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$$

Готово.

В рассматриваемом примере немного повезло: число 20 делится и на 4 и на 5. В общем случае такой номер не проходит. Рассмотрим, например, уравнение $\frac{3x^2}{20}-\frac{8y^2}{20}=1$. Здесь с делимостью всё печальнее и без трёхэтажных дробей уже не обойтись:

$$\frac{x^2}{\frac{20}{3}}-\frac{y^2}{\frac{20}{8}}=1$$

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}=1$$

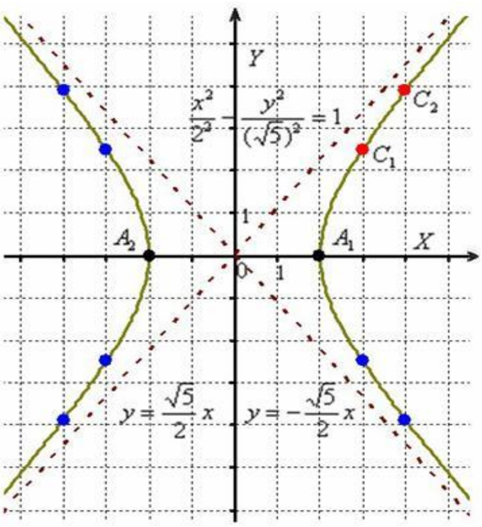
Итак, воспользуемся плодом наших трудов - каноническим уравнением $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$:

Как построить гиперболу?

Существует два подхода к построению гиперболы - геометрический и алгебраический.

С практической точки зрения вычерчивание с помощью циркуля... я бы даже сказал утопично, поэтому гораздо выгоднее вновь привлечь на помощь нехитрые расчёты.

Целесообразно придерживаться следующего алгоритма, сначала готовый чертёж, потом комментарии:



1) Прежде всего, находим асимптоты. Если гипербола задана каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то её асимптотами являются прямые $y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x$. В нашем случае: $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x,\quad y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$. Данный пункт обязателен! Это принципиальная особенность чертежа, и будет грубой ошибкой, если ветви гиперболы «вылезут» за свои асимптоты.

2) Теперь находим две вершины гиперболы, которые расположены на оси абсцисс в точках $A_1(a;\,0),\ A_2(-a;\,0)$. Выводится элементарно: если $y=0$, то каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ превращается в $\frac{x^2}{a^2}=1$, откуда и следует, что $x^2=a^2 \Rightarrow x=a,\ x=-a$. Рассматриваемая гипербола имеет вершины $A_1(2;\,0),\ A_2(-2;\,0)$

3) Ищем дополнительные точки. Обычно хватает двух-трёх. В каноническом положении гипербола симметрична относительно начала координат и обеих координатных осей, поэтому вычисления достаточно провести для 1-й координатной четверти. Методика точно такая же, как и при построении эллипса. Из канонического уравнения $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ на черновике выражаем:

$$\frac{y^2}{5}=\frac{x^2}{4}-1$$

$$y^2=\frac{5}{4}(x^2-4)$$

Уравнение распадается на две функции:

$y=\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2-4)}$ - определяет верхние дуги гиперболы (то, что нам надо);

$y=-\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2-4)}$ - определяет нижние дуги гиперболы.

Напрашивается нахождение точек с абсциссами $x=3,\ x=4$:

$$C_1: x=3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\sqrt{5(3^2-4)}=\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5;$$

$$C_2: x=4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\sqrt{5(4^2-4)}=\frac{\sqrt{60}}{2}\approx 3{,}87.$$

4) Изобразим на чертеже асимптоты $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x,\quad y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$, вершины $A_1(2;\,0),\ A_2(-2;\,0)$, дополнительные C_1, C_2 и симметричные им точки в других

координатных четвертях. Аккуратно соединим соответствующие точки у каждой ветви гиперболы:

Техническая трудность может возникнуть с иррациональным угловым коэффициентом $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$, но это вполне преодолимая проблема.

Отрезок A_1A_2 называют действительной осью гиперболы,

его длину $|A_1A_2| = 2a$ - расстоянием между вершинами;

число $a = |OA_1| = |OA_2|$ называют действительной полуосью гиперболы;

число b - мнимой полуосью.

В нашем примере: $a = 2, b = \sqrt{5}, |A_1A_2| = 4$, и, очевидно, если данную гиперболу повернуть вокруг центра симметрии и/или переместить, то эти значения не изменятся.

Определение гиперболы. Фокусы и эксцентриситет

У гиперболы, точно так же, как и у эллипса, есть две особенные точки F_1, F_2, которые называются фокусами. Не говорил, но на всякий случай, вдруг кто неверно понимает: центр симметрии и точки фокуса, разумеется, не принадлежат кривым.

Общая концепция определения тоже похожа:

Гиперболой называют множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1, F_2 - есть величина постоянная, численно равная расстоянию между вершинами этой гиперболы: $2a$. При этом расстояние между фокусами превосходит длину действительной оси: $|F_1F_2| > 2a$.

Если гипербола задана каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то расстояние от центра симметрии до каждого из фокусов рассчитывается по формуле: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

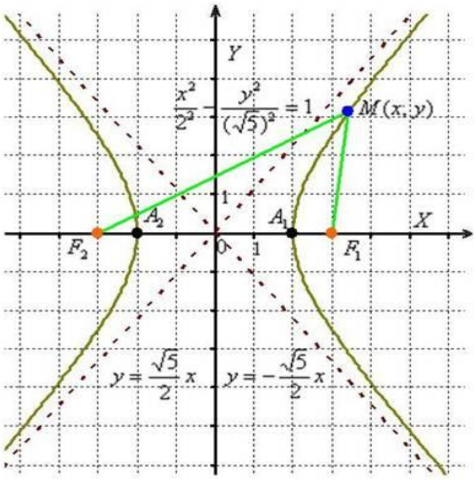
И, соответственно, фокусы имеют координаты $F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$.

Для исследуемой гиперболы $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$:

$$c = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

$$F_1(3; 0), F_2(-3; 0)$$

Разбираемся в определении. Обозначим через $|F_1M|, |F_2M|$ расстояния от фокусов до произвольной точки $M(x; y)$ гиперболы:



Сначала мысленно передвигайте синюю точку по правой ветви гиперболы - где бы мы ни находились, модуль (абсолютное значение) разности между длинами отрезков F_1M, F_2M будет одним и тем же:

$$\left| |F_1M| - |F_2M| \right| = 2a = const$$

Если точку $M(x; y)$ «перекинуть» на левую ветвь и перемещать её там, то данное значение останется неизменным.

Знак модуля нужен по той причине, что разность длин $|F_1M| - |F_2M|$ может быть как положительной, так и отрицательной. Кстати, для любой точки правой ветви $|F_1M| - |F_2M| < 0$ (поскольку отрезок F_1M короче отрезка F_2M). Для любой точки $M(x; y)$ левой ветви ситуация ровно противоположная и $|F_1M| - |F_2M| > 0$.

Более того, ввиду очевидного свойства модуля $\left| |F_1M| - |F_2M| \right| = \left| |F_2M| - |F_1M| \right|$ безразлично, что из чего вычитать.

Удостоверимся, что в нашем примере модуль данной разности действительно равен расстоянию между вершинами. Мысленно поместите точку $M(x; y)$ в правую вершину гиперболы (A_1). Тогда: $\left| |F_1M| - |F_2M| \right| = |1 - 5| = |-4| = 4 = 2a$, что и требовалось проверить.

Эксцентриситетом гиперболы называют отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Так как расстояние от центра до фокуса больше расстояния от центра до вершины: $c > a$, то эксцентриситет гиперболы всегда больше «единицы»: $\varepsilon > 1$.

Для данного примера: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

По аналогии с эллипсом, зафиксировав значение $a = 2$, желающие могут провести самостоятельный анализ и проверку следующих фактов:

При увеличении эксцентриситета ветви гиперболы «распрямляются» к оси OY.

В предельном случае $\varepsilon \to \infty$ они стремятся занять положение двух прямых, проходящих через точки A_1, A_2 параллельно оси ординат.

Если же значение эксцентриситета приближается к единице, то ветви гиперболы «сплющиваются» к оси OX.

Равносторонняя гипербола

На практике часто встречается гипербола с равными полуосями. Если $b = a$, то каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ заметно упрощается: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$

А вместе с ним упрощаются и уравнения асимптот:

$$y = \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \frac{a}{a}x \Rightarrow y = x$$

$$y = -\frac{b}{a}x \Rightarrow y = -\frac{a}{a}x \Rightarrow y = -x$$

Прямые $y = x, y = -x$ пересекаются под прямым углом и «справедливо» делят координатную плоскость на 4 одинаковые части, в двух из которых находятся ветви кривой. Образно говоря, равносторонняя гипербола «идеально сложена», то есть и не растянута и не сплющена.

Так как $b = a$, то $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, следовательно, эксцентриситет любой равносторонней гиперболы равен: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

Предлагаю закрепить теорию и практические навыки миниатюрной задачей:

Пример 5

Построить гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ и найти её фокусы.

Поворот вокруг центра и параллельный перенос гиперболы

Вернёмся к демонстрационной гиперболе $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$. Что произойдёт, если в полученном уравнении поменять значения полуосей: $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$? Для эллипса данный трюк означал поворот на 90 градусов. Но здесь всё иначе! Уравнение $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ определяет совершенно другую гиперболу. Ну, хотя бы обратите внимание на иные вершины: $A_1(\sqrt{5}; 0), A_2(-\sqrt{5}; 0)$.

Теперь рассмотрим уравнение $-\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$, которое очевидно тоже задаёт гиперболу. Однако к исходному уравнению оно также не имеет никакого отношения! Это предыдущая гипербола, повёрнутая на 90 градусов, с вершинами $A_1(0;\sqrt{5}),\ A_2(0;-\sqrt{5})$ на оси ординат.

И, наконец, оставшийся случай $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ задаёт нашу гиперболу $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$, повернутую на 90 градусов. Как быть, если в практической задаче встретилась такая неканоническая запись?

Если требуется только построить кривую, то строим её в предложенном виде. Это довольно просто. Уравнения асимптот гиперболы $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ обладают обратными угловыми коэффициентами:

$$y=\frac{2}{\sqrt{5}}x,\quad y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x$$

Поскольку оси «поменялись ролями», то вершины будут расположены на оси ординат в точках $A_1(0;2),\ A_2(0;-2)$. Выразим верхнюю ветвь гиперболы:

$$-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{4}=\frac{x^2}{5}+1\Rightarrow y=2\sqrt{\frac{x^2+5}{5}}$$

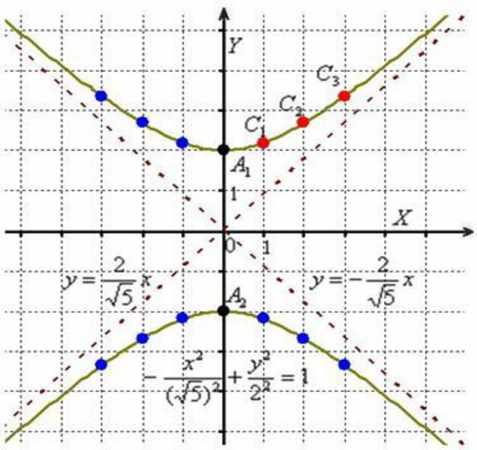
И найдём несколько дополнительных точек:

$$C_1: x=1\Rightarrow y=2\cdot\sqrt{\frac{1^2+5}{5}}=2\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\approx 2{,}2;$$

$$C_2: x=2\Rightarrow y=2\sqrt{\frac{2^2+5}{5}}=2\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\approx 2{,}7;$$

$$C_3: x=3\Rightarrow y=2\cdot\sqrt{\frac{3^2+5}{5}}=2\cdot\sqrt{\frac{14}{5}}\approx 3{,}35.$$

Выполним чертёж:



Помимо геометрии, похожие графики требуется строить в некоторых задачах математического анализа.

Однако по возможности всё-таки лучше осуществить поворот на 90 градусов и переписать уравнение $-\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ в канонической форме. Для этого следует поменять местами значения полуосей и переставить «минус» к переменной «игрек»: $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$.

Параллельный перенос. Уравнение $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ задаёт гиперболу с действительной полуосью «а», мнимой полуосью «бэ» и центром в точке $\tilde{O}(x_0;\, y_0)$.

Так, например, гипербола $\frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y+1)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ имеет центр симметрии в точке $\tilde{O}(1;\,-1)$. Асимптоты, само собой, переместились вместе с гиперболой, их уравнения отыскиваются по формулам:

$$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0) \qquad y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0)$$

$$y+1=\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1) \qquad y+1=-\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}-1 \qquad y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}-1$$

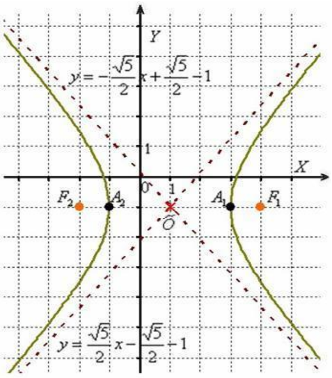
Полуоси $a=2, b=\sqrt{5}$ и расстояние от фокусов до центра симметрии $c=3$ остались прежними, а вот координаты фокусов изменились с учётом параллельного переноса:

$F_1(c+x_0;\, y_0),\ F_2(-c+x_0;\, y_0)$

$F_1(3+1;\,-1),\ F_2(-3+1;\,-1)$

$F_1(4;\,-1),\ F_2(-2;\,-1)$

Параллельный перенос гиперболы доставил заметно больше хлопот, чем параллельный перенос эллипса, смотрим на картинку:



После таких трудов, уравнение трогать бессмысленно, но если таки просят, то придётся….

В нестрогом варианте: «Приведём уравнение гиперболы $\frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y+1)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ к каноническому виду путём параллельного переноса в начало координат: $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ ».

Или в строгом - с параллельным переносом системы координат началом в точку $\tilde{O}(1;-1)$

На практике часто встречается комбинация поворота на произвольный угол и параллельного переноса гиперболы. Данная ситуация рассматривается на уроке Приведение уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду.

Парабола и её каноническое уравнение

Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, где $p>0$ - действительное число. Нетрудно заметить, что в своём стандартном положении парабола «лежит на боку» и её вершина находится в начале координат. При этом функция $y=\sqrt{2px}$ задаёт верхнюю ветвь данной линии, а функция $y=-\sqrt{2px}$ - нижнюю ветвь. Очевидно, что парабола симметрична относительно оси OX. Собственно, чего париться:

Пример 6

Построить параболу $y^2=4x$

Решение: вершина известна, найдём дополнительные точки. Уравнение $y=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$ определяет верхнюю дугу параболы, уравнение $y=-2\sqrt{x}$ - нижнюю дугу.

В целях сократить запись вычисления проведём «под одной гребёнкой» $y=\pm2\sqrt{x}$:

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\pm2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2}\approx\pm1{,}41;$$
$$x=1\Rightarrow y=\pm2\cdot\sqrt{1}=\pm2;$$
$$x=2\Rightarrow y=\pm2\cdot\sqrt{2}\approx\pm2{,}83;$$
$$x=4\Rightarrow y=\pm2\cdot\sqrt{4}=\pm4.$$

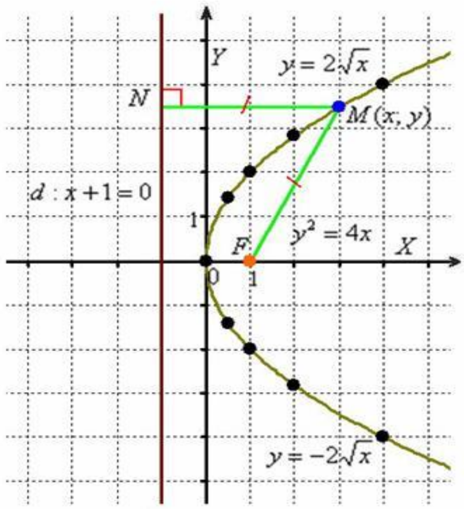
Для компактной записи результаты можно было свести в таблицу.

Перед тем, как выполнить элементарный поточечный чертёж, сформулируем строгое определение параболы:

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой d, не проходящей через точку F.

Точка F называется фокусом параболы, прямая d - директрисой (пишется с одной «эс») параболы. Константа «пэ» канонического уравнения $y^2 = 2px$ называется фокальным параметром, который равен расстоянию от фокуса до директрисы. В данном случае $p = 2$. При этом фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса задаётся уравнением $x + \frac{p}{2} = 0$.

В нашем примере $F(1; 0), \quad d : x + 1 = 0$:



Определение параболы понимается ещё проще, чем определения эллипса и гиперболы. Для любой точки $M(x, y)$ параболы длина отрезка FM (расстояние от фокуса до точки) равна длине перпендикуляра MN (расстоянию от точки до директрисы):

$|FM| = |MN|$

Поздравляю! Многие из вас сегодня сделали самое настоящие открытие. Оказывается, гипербола и парабола вовсе не являются графиками «рядовых» функций, а имеют ярко выраженное геометрическое происхождение.

Очевидно, что при увеличении фокального параметра ветви графика $y^2 = 2px$ будут «раздаваться» вверх и вниз, бесконечно близко приближаясь к оси OY. При уменьшении же значения «пэ» они начнут сжиматься и вытягиваться вдоль оси OX

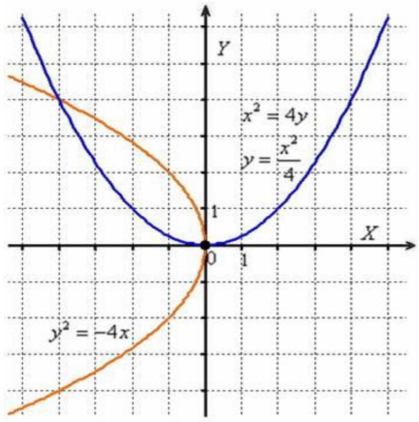
Эксцентриситет любой параболы равен единице: $\varepsilon = 1$

Поворот и параллельный перенос параболы

Парабола - одна из самых распространённых линий в математике, и строить её придётся действительно часто. Поэтому, пожалуйста, особенно внимательно отнестись к заключительному параграфу урока, где я разберу типовые варианты расположения данной кривой.

1) Поворот вокруг вершины. Если в уравнении присутствует знак «минус»: $y^2 = -2px$, то это означает разворот параболы на 180 градусов относительно своего канонического положения. А если в уравнении $y^2 = 2px$ переменные «поменялись местами»: $x^2 = 2py$, то это означает поворот канонической параболы на 90 градусов против часовой стрелки.

На следующем чертеже изображены графики кривых $y^2 = -4x, \quad x^2 = 4y$:



Оба уравнения задают неканоническое расположение нашей подопытной параболы $y^2 = 4x$, причём во втором случае легко получить функциональную запись, к которой мы привыкли в курсе математического анализа: $x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$.

Таким образом, все параболы, с которыми мы обычно работаем - не каноничны! Я очень хотел «уложить на бок» классическую параболу $y = x^2$ и разобрать каноническое уравнение $y^2 = x$, но, к сожалению, у неё достаточно малый фокальный параметр $p = \frac{1}{2}$, и чертеж с точкой фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$, директрисой $x + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{4} = 0$ был бы крайне невразумителен.

2) Параллельный перенос. Без всякой оригинальности. Уравнение $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ задаёт ту же параболу $y^2 = 2px$ с вершиной в точке $\tilde{O}(x_0; y_0)$. По моим наблюдениям, во многих задачах матана очень популярен частный случай $y^2 = 2p(x - x_0)$ - когда каноническая парабола сдвигается влево или вправо по оси абсцисс. Ну, и как дополнительная опция, разворачивается, если при переменной «икс» есть знак «минус».

Соответствующее творческое задание для самостоятельного решения:

Пример 7

Построить параболу $y^2 = -2x + 3$. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокус и уравнение директрисы.

Как лучше действовать?

По условию требуется построить параболу $y^2 = -2x + 3$. Именно такую - в неканоническом виде! Поэтому в первой части задачи следует представить уравнение в виде $y^2 = 2p(x - x_0)$, что позволит сразу определить вершину. Затем по образцу Примера 6 нужно провести поточечное построение линии, работая с уравнениями $y = \pm\sqrt{2p(x - x_0)}$.

Вторая часть задания предполагает приведение уравнения к каноническому виду. Проанализируйте равенство $y^2 = 2p(x - x_0)$ - есть ли поворот, есть ли параллельный перенос? После того, как выясните каноническую запись $y^2 = 2px$, необходимо найти фокус параболы и уравнение её директрисы. Обратите внимание, что в контексте условия это, вероятнее всего, нужно сделать в каноническом положении!

Использованная литература

1. Киселёв, Андрей Петрович // *Большая советская энциклопедия* : [в 30 т.] / гл. ред. *А. М. Прохоров*. - 3-е изд. - М. : Советская энциклопедия, 1969-1978.

2. Андронов И. К., А. П. Киселев., «Математика в школе», 1941, № 2

3. Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселев, «Математика в школе», 1948, № 4

4. Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.

5. Моргулис А. Я., Тростников В. Законодатель школьной математики // Наука и жизнь. 1968. № 1

6. Пыльнев-Рогачёв, Лунёва М. И. Служитель «царицы-наук» // Кольцовский сквер. 2002. № 3