РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯД ТЕЙЛОРА. РЯД МАКЛОРЕНА. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ

Усмонов Махсуд Тулқин ўғли
maqsudu32@gmail.com
Ташкентский университет информационных технологий
Каршинский филиал

Аннотация: В данной статье приведена информация о разложении функций в степенные ряды, ряд Тейлора, ряд Маклорена. Приведены примеры решений.

Ключевые слова: Разложение функций в степенные ряды, ряд Тейлора, ряд Маклорена

Любой числовой ряд может или сходиться, или расходиться. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то это значит, что сумма его членов равна некоторому конечному числу: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = S$

На уроке Степенные ряды. Область сходимости ряда мы рассматривали уже не числовые, а функциональные и степенные ряды. Возьмём тот самый подопытный степенной ряд, который всем понравился: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. В ходе исследования было установлено, что этот ряд сходится при $-1 \le x \le 1$. Функциональные ряды сходятся к функциям. В частности, суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ в его области сходимости $-1 \le x \le 1$ является некоторая функция $f(x)$:

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \frac{x^5}{5^2} + \ldots = f(x)$$

Еще раз подчеркиваю, что данный факт справедлив только для найденной области $-1 \le x \le 1$, вне этого промежутка степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ будет расходиться.

Чтобы всё стало окончательно понятно, рассмотрим примеры с картинками. Я выпишу простейшее табличное разложение синуса в степенной ряд:

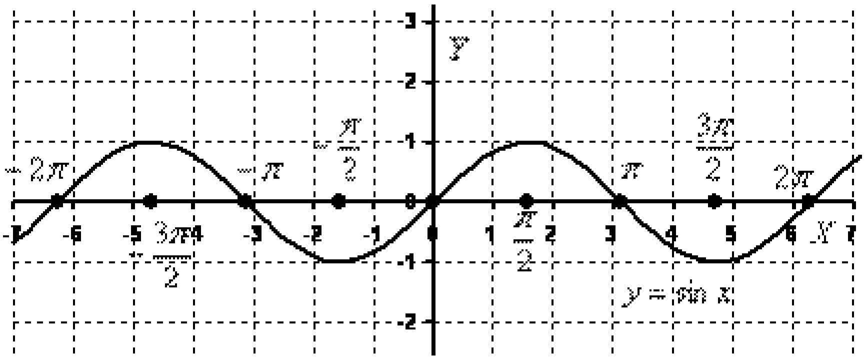
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} + \ldots$$

Область сходимости ряда: $-\infty < x < +\infty$

(cc) BY

(По какому принципу получены сами элементарные табличные разложения, мы рассмотрим чуть позже).

Теперь вспоминаем школьный график синуса $y = \sin x$:



Если начертить график бесконечного многочлена $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} + \ldots$, то получится… та же самая синусоида!

То есть, наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ сходится к функции $y = \sin x$.

Используя признак Даламбера, легко проверить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ сходится при любом «икс»: $-\infty < x < +\infty$ (собственно, поэтому в таблице разложений и появилась такая запись об области сходимости).

А что значит вообще «сходится»? Если я возьму первые три члена ряда $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ и начерчу график многочлена пятой степени, то он лишь отдаленно будет напоминать синусоиду. А вот если составить многочлен из первых ста членов ряда: $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots - \frac{x^{199}}{199!}$ и начертить его график, то он будет с синусоидой практически совпадать (на достаточно длинном промежутке). Чем больше членов ряда - тем лучше приближение. И, как уже отмечалось, график бесконечного многочлена - есть в точности синусоида. Иными словами, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ сходится к функции $y = \sin x$ при любом значении «икс».

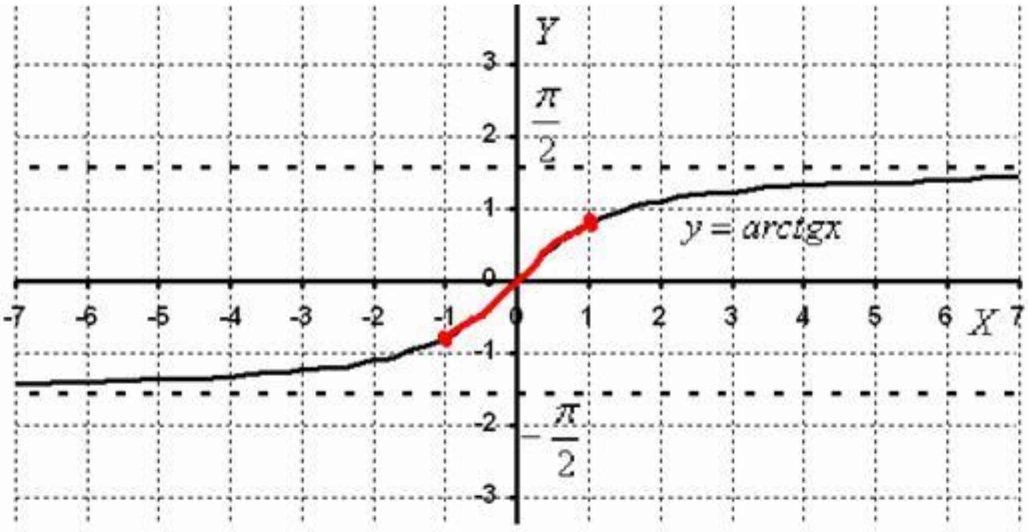
Рассмотрим более печальный пример, табличное разложение арктангенса:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Область сходимости ряда: $-1 \leq x \leq 1$

(cc) BY

Печаль заключается в том факте, что график бесконечного многочлена $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ существует и совпадает с графиком арктангенса $y = arctgx$ только на отрезке $[-1; 1]$ (т.е. в области сходимости ряда):



Вне отрезка $[-1; 1]$ разложение арктангенса в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ расходится, и о графике речи не идёт вообще, поскольку каждое значение бесконечного многочлена бесконечно .

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать две взаимно обратные задачи:

- найти сумму ряда (функцию) по известному разложению;
- разложить функцию в ряд (если это возможно) и найти область сходимости ряда.

Разложение функций в степенной ряд.

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена

Приступим к увлекательному занятию - разложению различных функций в степенные ряды. Сначала пара формул, затем практические задания.

Если функция $f(x)$ в некотором интервале раскладывается в степенной ряд по степеням $(x-a)$, то это разложение единственно и задается формулой:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Примечания: надстрочный индекс $^{(n)}$ в последнем слагаемом обозначает производную «энного» порядка. Вместо буквы «а» в литературе часто можно встретить букву x_0.

Данная формула носит фамилию англичанина Тейлора (ударение на первый слог).

CC BY

На практике процентах в 95-ти приходится иметь дело с частным случаем формулы Тейлора, когда $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Этот ряд получил известность благодаря шотландцу Маклорену (ударение на второй слог). Разложение Маклорена также называют разложением Тейлора по степеням x.

Вернемся к таблице разложений элементарных функций и выведем разложение экспоненциальной функции:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Как оно получилось? По формуле Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$, тогда:

$f(0)=e^0=1$

Теперь начинаем находить производные в точке $a=0$: первую производную, вторую производную, третью производную и т.д. Это просто, поскольку при дифференцировании экспонента превращается в саму себя:

$f'(x)=(e^x)'=e^x$

$f'(0)=e^0=1$

$f''(x)=(f'(x))'=(e^x)'=e^x$

$f''(0)=e^0=1$

$f'''(x)=(f''(x))'=(e^x)'=e^x$

$f'''(0)=e^0=1$

И так далее….

Совершенно очевидно, что $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=1$

Примеры разложения функций в ряд Маклорена

В данном параграфе мы рассмотрим типовую задачу на разложение функции в ряд Маклорена и определении области сходимости полученного ряда. Нет, мучаться с нахождением производных не придется, мы будем пользоваться таблицей.

Пример 1

Разложить функцию в ряд Маклорена. Найти область сходимости полученного ряда.

Эквивалентная формулировка: Разложить функцию в ряд по степеням x

$f(x)=x\cos 3x$

Решение незамысловато, главное, быть внимательным.

CC BY

Конструируем наш ряд. Плясать начинают, как правило, от функции, разложение которой есть в таблице:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

В данном случае $\alpha = 3x$:

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Раскрываем наверху скобки:

$$\cos 3x = 1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Теперь умножаем обе части на «икс»:

$$x\cos 3x = x \cdot \left(1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right)$$

В итоге искомое разложение функции в ряд:

$$y = x\cos 3x = x - \frac{3^2 x^3}{2!} + \frac{3^4 x^5}{4!} - \frac{3^6 x^7}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!} + \ldots$$

Как определить область сходимости? Чем постоянно проводить очевидные рассуждения, проще запомнить: разложения синуса, косинуса и экспоненты сходятся при любом действительном значении x (за исключением, конечно, тех случаев, когда, например, $\alpha = \sqrt{x}$ - см. комментарии к табличным разложениям). Домножение $\cos 3x$ на «икс» не играет никакой роли в плане сходимости, поэтому область сходимости полученного ряда: $-\infty < x < +\infty$

Пример 2

Разложить функцию в ряд по степеням x. Найти область сходимости ряда.

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Я не стал рассматривать простейшие разложения вроде $f(x) = \sin(x^2)$, $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ или $f(x) = e^{-2x}$, поскольку это фактически задача в одно действие. В нужные табличные разложения вместо «альфы» необходимо подставить x^2, $\frac{x}{2}$, $-2x$ и немного причесать полученные ряды. Единственное предостережение - не теряйте по невнимательности степени и знаки.

А сейчас для разнообразия рассмотрим что-нибудь с минусами.

Пример 3

Разложить функцию в ряд по степеням x. Найти область сходимости ряда.

$$f(x) = \ln(1 - x^2)$$

(cc) BY

В таблице находим похожее разложение:

$$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n}+\ldots$$

Трюк прост - перепишем нашу функцию немного по-другому:

$$f(x)=\ln(1-x^2)=\ln(1+(-x^2))$$

Таким образом, $\alpha=-x^2$ и:

$$\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{(-x^2)^2}{2}+\frac{(-x^2)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(-x^2)^n}{n}+\ldots$$

Окончательно:

$$\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\ldots-\frac{x^{2n}}{n}-\ldots$$

Теперь нужно определить область сходимости. Согласно таблице, ряд сходится при $|\alpha|<1$.

В данном случае $\alpha=-x^2$:

$$|-x^2|<1$$

Так как квадрат неотрицателен, то при раскрытии модуля знак «минус» просто испаряется:

$$x^2<1 \quad\Rightarrow\quad -1<x<1$$

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала. Значения $x=1$, $x=-1$ не входят в область определения функции $f(x)=\ln(1-x^2)$, но как мы видели в Примере 2, в «проблемной» точке САМ РЯД сходиться может. И поэтому от греха подальше лучше выполнить прямую подстановку концов интервала в найденное разложение. При $x=1$ получаем: $-1^2-\frac{1^4}{2}-\frac{1^6}{3}-\ldots-\frac{1^{2n}}{n}-\ldots=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходящийся гармонический ряд. И он же получается при $x=-1$

Таким образом, область сходимости ряда:

$$-1<x<1$$

Но так бывает далеко не всегда:

Простейшее разложение из учебника $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$ сходится ещё в одной точке: $-1<x\le 1$. Здесь значение $x=-1$ тоже вне игры, а вот при $x=1$ сумма получившегося знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ в точности равна $\ln 2$.

Интересно отметить, что разложение в ряд такого логарифма:

CC BY

$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\ldots$ - сходится уже на обоих концах интервала: $-1\leq x\leq 1$ (при подстановках $x=1$, $x=-1$ получается тот же самый сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$)

Использованная литература

1. Киселёв, Андрей Петрович // *Большая советская энциклопедия* : [в 30 т.] / гл. ред. *А. М. Прохоров*. - 3-е изд. - М. : Советская энциклопедия, 1969-1978.
2. Андронов И. К., А. П. Киселев., «Математика в школе», 1941, № 2
3. Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселев, «Математика в школе», 1948, № 4
4. Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.
5. Моргулис А. Я., Тростников В. Законодатель школьной математики // Наука и жизнь. 1968. № 1
6. Пыльнев-Рогачёв, Лунёва М. И. Служитель «царицы-наук» // Кольцовский сквер. 2002. № 3

cc BY