NEYTRON YULDUZLAR VA ULARNING DEGENERATSIYA BOSIMI

R.M.Eshbo‘riyev, Sh.Sh.Sayfiyev,
U.I.Nabiyev, M.L.Fayzullayeva, J.O‘.Doniyorov
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
sherzodsayfiyev20@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.15097522

Annotatsiya. *Neytron yulduzlarning massasi va o‘lchamlarini matematik hisoblash, ularni kuzatuv natijalari bilan solishtirish orqali neytron yulduzlar uchun modellar yaratish mumkin bo‘ladi. Ushbu ishda neytron yulduzlarning massasi va o‘lchamlarining chegaraviy shartlari hamda degeneratsiya bosimi sodda holatlar uchun norelyativistik va relyativistik holatlar uchun batafsil hisoblangan.*

Kalit so‘zlar. *neytron yulduz, Fermi energiyasi, degeneratsiya bosimi.*

Kirish. Kub (*LxLxL*) neytronlar bilan to‘ldirilgan deb tasavvur qiling. Kub hajmi tashqarisida potensiali: $U_{tash}=\infty$ va $U_{ich}=0$ deb belgilaymiz. Neytronlarning barchasi bir xil bo‘lib, ular o‘zaro ta’sir qilmaydi va Paulining taqiqlash prinsipi shartlariga muvofiq, imkon qadar past energiya holatlariga tushadi.

Shredinger tenglamasi uch o‘lchovli kvant qudug‘iga nisbatan quyidagicha ifodalanadi.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_N}\nabla^2\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z) \quad (1)$$

Cheksiz kvant qudug‘i uchun potensial energiya quyidagicha bo‘ladi:

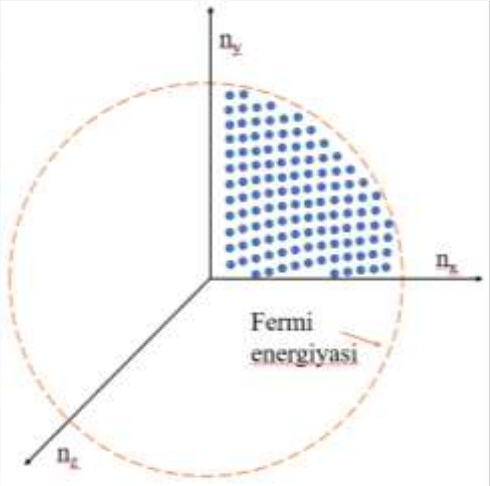
$$U(x,y,z) = \begin{cases} 0, & agar\ 0 \le x,\ \ y,z \le L \\ \infty, & agar\ boshqa\ holatlar \end{cases} \quad (2)$$

Endi chegaravish shartlarni qo‘yib olamiz. $\Psi(x,y,z) = 0$ agar *x,y,z* - quduq tashqarisida bo‘lsa.

Xos holatlar uchun tenglamani yechib quyidagi tenglikni olamiz:

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N L^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \quad (3)$$

Neytron yulduzning ichki qismi faqat neytronlardan iborat deb qarasak, neytron yulduzning muvozanat shartini sodda hisoblash mumkin bo‘ladi. Neytronlarni Fermi gazi deb qarab, ular eng pastgi pog‘onalardan barcha holatlarni to‘ldiradi deb faraz qilamiz. Eng oxirgi to‘ldirilgan energetik sath Fermi sathi (energiyasi) bo‘ladi.



1-rasm. Faqat neytronlardan tashkil topgan neytron yulduz ichida neytronlarning joylashuvi hamda Fermi energiyasi.

Bunda Paulining taqiqlash prinspiga koʻra ikkita neytron bitta holatni egallay olmaydi. Shu sababdan gravitatsiya bosimiga qarshi bosim paydo boʻladi. Bu bosim degeneratsiya bosimi deyiladi. Neytronlar Fermi-Dirak statistikasiga boʻysunadi. Shu sababdan har bir neytronning energiyasi quyidagicha boʻladi:

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N L^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N L^2} r^2 \leq E_F \quad (4)$$

Bu yerda E_F – Fermi energiyasi.

Ushbu fazoda kvant sonlarning barcha kombinatsiyalari energiyaga hissa qoʻshadi. Biz fazoni sferik shakldа deb olamiz va bu sferaning radiusini r_n deb belgilasak, bu sfera ichida N ta zarra mavjud.

$$N = (2)_{spin}\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi r_n^3\right) \quad (5)$$

Bunda 2 koefiyetsent, neytronlar ikki xil spin holatiga ega ekanligidan va 1/8 fazoning 1/8 qismidan foydalanganligimizdan. Chunki barcha kvant sonlar musbat boʻlishi kerak. (4) va (5) tenglamalardan Fermi energiyasini topamiz.

$$E_F = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N L^2} r^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N L^2}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{2/3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N}\left(\frac{3N}{\pi L^3}\right)^{2/3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} \quad (6)$$

Fermi impulsini $p = \sqrt{2mE}$ formuladan topamiz.

$$p_F = \hbar\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3} \quad (7)$$

Fermi-Dirak statistikasi va zarralar zichligi. N - fermionli tizimdagi umumiy bosimni ifodalash uchun zarracha zichligi va haroratni oʻrganish zarur. Buning uchun Fermi-Dirak statistikasi yordamida zarrachalarning energiya va haroratiga bog'liqligini tavsiflaymiz. Fermi-Dirak taqsimoti quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E(p)-\mu}{kT}} + 1} \quad (8)$$

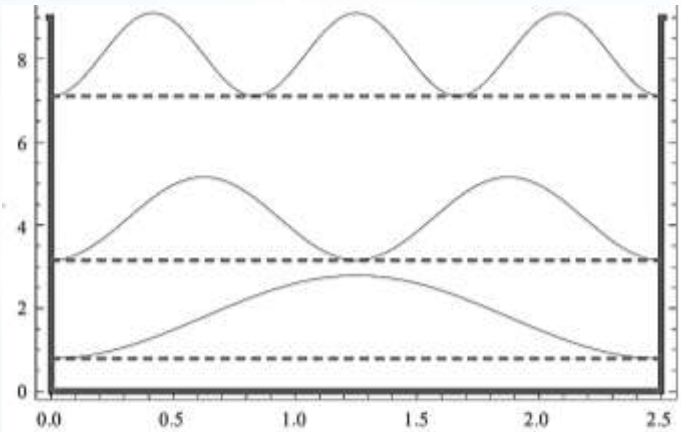
Bu yerda $E(p) = \sqrt{p^2c^2 + m_N^2c^4}$, μ – kimyoviy potensial [1].

Zarralar zichligini (konsentratsiyasini) n_N quyidagicha belgilaymiz.

$$n_N = \frac{N}{V} = \frac{1}{V}\int f(E)dN \quad (9)$$

Bu formuladan bosim, zichlik va impuls o'rtasidagi bog'lanishlarni topamiz. Cheksiz kvadrat quduq tizimida chekli hajm V mavjud bo'lib, u de-Broyl to'lqin uzunligiga $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$ muvofiq ruxsat etilgan holatlarning diskret to'plamini beradi.

$$p_i = m_i\frac{2\pi\hbar}{L} \qquad m_i = 1,2,3,\ldots \quad (10)$$



2-rasm. L o'lchamli kvany qudug'ida de-Broyl to'lqini.

Bundan kelib chiqib V hajmda berilgan fazoda ruxsat etilgan holatlar to'plamini aniqlash mumkin.

$$d^3m = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 d^3p \quad (11)$$

$d^3m=dm_xdm_ydm_z$ - kvant fazodagi holatlar sonini ifodalashda uch o'lchovli fazo hajmi elementidir. Bu uch o'zgaruvchi bo'yicha integrallashni ifodalaydi.

d^3p-impus fazosidagi uch o'lchovli hajm elementidir. Bu yerda impulsning uch komponentini o'z ichiga oladi. Bu o'lchamlar kvant mexanik fazoda kvant holatlarning sonini yoki taqsimotini hisoblash uchun ishlatiladi.

Endi (9) bilan (11) ifodalarni solishtirsak, tizimdagi holatlarning umumiy sonini $\int dN$ ruxsat etilgan holatlar sonining yig`indisiga tengligini ko`rishimiz

mumkin. $\int g d^3 m$ bu yerda biz degeneratsiya faktori g ni kiritdik. Bu factor fermionning ma`lum impuls uchun nechta holatga ega ekanligini bildiradi [2-4].
Demak g=2s+1 degeneratsiyalangan neytronlar uchun g=2 chunki S=1/2 (6) va (9) ifodadan quyidagi tenglikni olamiz.

$$n_N = \frac{g}{V}\int f(E)d^3m \quad (12)$$

Bu tenglikni fazoda umumiy impuls bo`yicha integrallashimiz mumkin.

$$n_N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_F} f(E)d^3p \quad (13)$$

Hali ham zarralar zichligi formulasida mavjud. Ifodani yanada chuqurroq tushunishimiz uchun ikkita holatni ko`rib chiqamiz (T=0) absolyut nol temperatura yoki T>0. Agar zarralar T>0 holatda bo`lsa bu fermionlar zarrachalar bilan bog‘liq bo‘lgan issiqlik energiyasiga ega ekanligini anglatadi. Bu energiya zarrachalar to‘qnashuvi vaqtida zarrachalar orasida uzatilishi mumkin va natijada yuqoriroq energiya darajasiga qo‘zg‘alish ehtimoli yuzaga keladi. Natijada tizim to‘liq degeneratsiyalangan bo‘lmaydi. Chunki past energiya holatlarining ba‘zilari qo‘zg‘algan fermionlar tufayli to‘liq to‘ldirilmagan bo‘ladi. Nol temperaturaga ega bo‘lmagan tizimni o‘rganish uchun *Grand kononik ansanbl* va bo‘linish funksiyalarini ko‘rib chiqish zarur [5-7]. Biroq nol temperaturali tizimda har bir zarrachaning issiqlik energiyasini e`tiborga olmaslik mumkin. Bundan tashqari, zarrachalar o‘zaro ta`sirlashmaydi deb hisoblasak, tizimni degeneratsiyalangan deb hisoblasak, u yuqorida aytib o‘tilganidek Pauli taqiqlash prinsipiga amal qiladi deb aytishimiz mumkin. Shu sababli, N ta neytronli tizim uchun temperaturani nolga teng deb olamiz. Bu tanlov o`zini oqlaydi. Chunki Fermi energiyasi (va unga mos Fermi temperaturasi:) oddiy neytron yulduzining baholangan temperaturalaridan (t~10^9 K) ancha katta [8].

Endi, agar biz tizimdagi neytronlar o‘zaro ta`sirlashmaydi va T=0 deb faraz qilsak, Fermi-Dirak taqsimoti quyidagicha bo‘ladi.

$$f(E) = \begin{cases} 1, & agar\ E(p) \le \mu \\ 0, & agar\ E(p) \ge \mu \end{cases} \quad (14)$$

Neytronning tizimga kirishi kerak bo‘lgan maksimal energiyasi Fermi energiyasi sifatida aniqlanadi. Ushbu ta`rif kimyoviy potensialga mos keladi va shuning uchun biz $\mu = E_F$ ekanligini aytishimiz mumkin. Bunday sharoitda sovuq o‘zaro ta`sir qilmaydigan degenerativ Fermi gazining zichligi (13) quyidagicha yozish mumkin.

$$n_N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_F} d^3p \quad (15)$$

Keyingi qadamda bosimni hisoblaymiz. $P=F/S$ klassik formuladan foydalanamiz. Agar $S=V/L$ hamda $dp=Fdt$ deb olsak.

$$P_i = N\frac{L_i}{V}\left(\frac{dp_i}{dt}\right) \quad (16)$$

Agar bu ifodaga quyidagicha almashtirishni qo'llasak $L_i=\upsilon_i dt$, natijada

$$P_i = \frac{N}{V}p_i\upsilon_i \quad (17)$$

Tenglikni olamiz. Buni uch o'lchovga umumlashtirib, biz uchta pozitsion yo'nalish bo'yicha 1/3 omilni olamiz. Bosimni impuls jihatdan ushlab turish uchun munosabatdan foydalanamiz. (15) ifodani ham hisobga olsak.

$$P(p) = \frac{n_N p^2 c^2}{3E(p)} \quad (18)$$

Energiya va impuls orasidagi bog'lanish $E(p) = \sqrt{p^2c^2 + m_N^2c^4}$ hamda (15) ifodani hisobga olsak.

$$P(p) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_F}\frac{1}{3}p^2c^2(p^2c^2 + m_N^2c^4)^{-\frac{1}{2}}d^3p \quad (19)$$

$$P(p) = \frac{2}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_F} p^2c^2(p^2c^2 + m_N^2c^4)^{-\frac{1}{2}}p^2dpd\Omega \quad (20)$$

Bu yerda $d^3p = p^2dpd\Omega$ sferik kordinatalarda $d\Omega = sin\theta d\theta d\varphi$ va sferik burchak integrali 4π ga teng bo'ladi. (20) tenglamadan.

$$P(p) = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F} p^4c^2(p^2c^2 + m_N^2c^4)^{-\frac{1}{2}}dp \quad (21)$$

Holat tenglamasi (HT) - bu bir tizimning holat o'zgaruvchilarini (bosim, temperatura, zichlik va boshqalar) tavsiflovchi munosabat. Sovuq degeneratsiyalangan Fermi gazimiz holatida biz degeneratsiya bosimi, massa va konsentratsiya (zichlik) o'rtasidagi munosabatni topmoqchimiz [7-9]. Bunda (21) tenglamani sodda ko'rinishga keltirish uchun $x = \frac{p}{m_N c}$ almashtirish olamiz.

$$P(x) = \frac{m_N^4c^5}{3\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F/m_N c} x^4(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx \quad (22)$$

Endi bosimni ikki holatda taxmin qilish mumkin. Norelyativistik va relyativistik holat uchun. Chunki holat tenglamalari sof neytron Fermi gaz qudug'ining xususiyatlarini olish va ko'satish uchun juda soddalik qiladi. Bunda

$$E \approx \begin{cases} m_N c^2 \;\Rightarrow\; p \ll m_N c \;\Rightarrow x \ll 1 \\ pc \;\;\Rightarrow\;\; p \gg m_N c \;\Rightarrow x \gg 1 \end{cases} \quad (23)$$

shuning uchun HT ni (22) relyativistik bo'lmagan Fermi gaz uchun x<<1 chegarasida va realyativistik Fermi gaz uchun x>>1 chegarasida yechish orqali topish mumkin. Ushbu chegaralarni (22) ga qo'ysak.

$$P(x)^{x\ll 1} = \frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3}\int_0^{p_F/m_N c} x^4 dx = \frac{m_N^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3}\left(\frac{p_F}{m_N c}\right)^5 \quad (24)$$

$$P(x)^{x\gg 1} = \frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3}\int_0^{p_F/m_N c} x^3 dx = \frac{m_N^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3}\left(\frac{p_F}{m_N c}\right)^4 \quad (25)$$

Oxirgi ifodaga quydagicha $n_N=N/V$ va $\rho=n_N m_N$ o'zgarishlarni kiritamiz va (7) Fermi impulsini inobatga olsak (24) hamda (25) ifodalar quyidagicha ko'rinishga keladi.

$$P_{NR}(\rho) = \frac{\hbar^2}{5}\left(\frac{3\pi^2}{m_N^4}\right)^{2/3} \rho^{5/3} \quad (26)$$

$$P_R(\rho) = \frac{\hbar c}{4}\left(\frac{3\pi^2}{m_N^4}\right)^{1/3} \rho^{4/3} \quad (27)$$

Bu ifodalarda bosim va zichlik orasidagi bog'lanishni topdik. (26) va (27) ifodalar norelyativistik va relyativistik rejimlar uchun politropik shakildagi $P = k\rho^{\gamma}$ holat tenglamasi.

(22) tenglamani integrallaymiz va degeneratsiya bosimi uchun yakuniy ifodani olamiz.

$$P = \frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3}\left[3ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x\sqrt{x^2+1}(2x^2-3)\right] \quad (28)$$

Bunda $x = \frac{p_F}{m_N c}$

Xulosa. Ushbu ishda biz norelyativistik va relyativistik hamda umumiy holatlarda faqat neytronlardan tashkil topgan neytron yulduzning oddiy modeli uchun degenerasiya bosimini topdik. Neytron yulduzlar uchun degeneratsiya bosimi ularning zichligiga va o'lchamiga bog'liq ekanligi ko'rsatildi. Bu borada ko'plab ishlar amalga oshirilgan, biroq bizning ishda analetik hisoblashlar batafsil yoritib berildi.

Adabiyotlar

1. Haensel, P., Potekhin, A. Y., & Yakovlev, D. G. (2007). Neutron Stars 1: Equation of State and Structure. *Springer*.
2. Silbar P. and Reddy S. "Neutron Stars for Undergraduates," American Journal of Physics, *72*, *892 (2004)*.

3. Timlin, J. (2013). *Neutron Degeneracy Pressure*. Quantum Mechanics II, Spring 2013.
4. Tolós L. The Equation of State for neutron Stars - From Fermi Gas to Interacting Baryonic Matter, Institute of Space Sciences, Goethe Universität, Lectures 1-2
5. Jaffe R. Degenerate Fermion Systems, MIT, Lectures (2006).
6. Sigrist M. Statistical Mechanics, ETH Zürich, Lectures (2014).
7. Kokkotas K. Neutron Stars: Structure, Lectures (2012)
8. Benhar O. The Structure of Compact Stars, Università di Roma (2016)
9. Sagert I., Hempel M., Greiner C., and Bielich J., Compact Stars for Undergraduates, Eur. J. Phys. 27, 577-620 (2006)