BIRINSHI TÁRTIPLI KVAZISIZIQLI TENLEMELERDIŃ SHESHIMLERI HÁM QÁSIYETLERI

Arzimova I.
4-kurs studenti

Ilimiy basshı docent **Otarova J.A.**
Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti
j.otarova@mail.ru

DOI: **https://doi.org/10.5281/zenodo.15644011**

Annotaciya. *Maqalada fizikalıq hám injenerlik processlerdi matematikalıq modellestiriwde áhmietli orın tutatuǵın birinshi tártipli kvazisızıqlı differenciallıq teńlemeler qaralǵan. Klassifikaciya, integrallawdıń tiykarǵı usılları, sonıń ishinde, xarakteristikalar usılı keltirilip, úlgili máselelerge misallar keltiriledi. Sheshimlerdiń bar bolıwı hám birden-birligine ayrıqsha itibar qaratılǵan. Nátiyjeler gidrodinamika, kóshiriw teoriyası hám biofizikanıń ámeliy máselelerin úyreniwde paydalı bolıwı múmkin.*

Tayanısh sózler. *Kvazisızıqlı tenlemeler, birinshi tártipli tenleme, xarakteristikalar usılı, sheshimlerdiń bar ekenligi, birden-birlik, integrallaw, differenciallıq tenlemeler, ámeliy matematika, matematikalıq modellestiriw, baslanǵish másele.*

Birinshi tártipli differenciallıq tenlemeler differenciallıq tenlemeler kursınıń fundamentallıq obyekti bolıp tabıladı. Olardıń ishinde belgisiz funkciyanıń tuwındısı sızıqlı túrde kiretuǵın, biraq funkciyanıń ózi sızıqlı emes túrde payda boliwi múmkin bolgan kvazi sızıqlı teńlemeler ayrıqsha áhmiyetke iye [1]. Bul tenlemeler fizika, ximiya, biologiya, injenerlik sıyaqlı kóplegen ámeliy pánlerde ushırasadı. Kvazisızıqlı teńlemeniń klassikalıq úlgisi gidrodinamikadaǵı kóshiriw teńlemesi hám úzliksizlik teńlemesi bolıp tabıladı [2].

Bul jumısta birinshi tártipli kvazisızıqlı teńlemelerdi sheshiw usılları izertlenedi, olardıń ishinde tiykarǵısı - dáslepki teńlemeni arnawlı iymeklikler boyınsha ápiwayı differenciallıq teńlemeler sistemasına keltiriwge múmkinshilik beretuǵın xarakteristikalar usılı.

Birinshi tártipli dara tuwındılı kvazisızıqlı differenciallıq teńleme dep, mına

$$\begin{aligned} &X_1(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,...,x_n,)u\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+\\ &+X_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,...,x_n,u), \end{aligned} \tag{1}$$

teńlemege aytıladı, bunda $X_i(x_1,x_2,...,x_n,u),$ $(i=\overline{1,n})$ hám $R(x_1,x_2,...,x_n,u)-$berilgen funkciyalar, olardı $x_i,(i=\overline{1,n})$ gárezsiz ózgeriwshileriniń hám u izleniwshi funkciyanıń bazibir $D_1\subseteq R^{n+1}$ózgeriw oblastında úzliksiz differencillanatuǵın funkciyalar dep esaplaymız. Birinshi tártipli dara tuwındılı sızıqlı teńlemeden ózgeshieligi $X_i, (i=\overline{1,n})$ koefficientleri hám R oń jaǵı u izleniwshi funkciyadan ǵárezli bolatuǵının atap ótemiz.

Bul (1) teńlemeni sheshiw jolı sızıqlı teńlemeni sheshiw jolına uqsas boladı. Onıń tiykarǵı basqıshların kiritemiz. (1) teńlemeniń sheshimin anıq emes túr de

$$V(x_1,x_2,...,x_n,u)=0, \tag{2}$$

kórinisinde izleymiz, bunda $V-$óziniń argumentleriniń bazı bir úzlıksiz differenciallanatuǵın funkciyası, sonıń menen birge,

$$\frac{\partial V(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)},u^{(0)})}{\partial u}\neq 0. \tag{3}$$

Endi u funkciyasın (2) teńlemeden anıqlanatuǵın $x_1,x_2,...,x_n$ ózgeriwshileriniń funkciyası dep esaplap, usı (2) qatnasın x_i boyınsha differenciallaymız.

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0, \qquad k=1,2,...n \tag{4}$$

Bul (4) ańlatpaların (1) teńlemege qoyıp, $\frac{\partial V}{\partial u}$ ańlatpasına kóbeytip hám barıq aǵzalardı sol jaqqa shıǵarıp, tómendegi teńlemeni alamız.

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial V}{\partial x_u}+\frac{\partial V}{R}=0, \tag{5}$$

(5) teńleme $V-$belgisiz funkciyaǵa qarata birtekli sızıqlı teńleme boladı. Al, oǵan sáykes keliwshi xarakteristikalar teńlemeleriniń sisteması simmetriyalıq túrde

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=...=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{du}{R}=0, \tag{6}$$

kóriniske iye hám bul sistema n ǵárezsiz

$$\psi_1(x_1,x_2,...,x_n,u),\psi_2(x_1,x_2,...,x_n,u),...,\psi_n(x_1,x_2,...,x_n,u).$$

Birinshi integrallarǵa iye boladı. Sonlıqtan,

$$V=\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n) \tag{7}$$

formulası (5) birtekli teńlemeniń ulıwma sheshimi boladı. Bul (7) formulasın (2) qatnasın qoyıp, (1) teńlemeniń izlegen sheshimine iye bolamız.

$$\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)=0 \tag{8}$$

bunda $\Phi-$ qálegen úzliksiz differenciallanıwshı funkciya. (8) qatnas (1) kvazisızıqlı differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimi dep ataladı.

Eger (8) teńlemeni u funkciyasına qarata sheshiw múmkin bolsa, onda (1) teńlemeniń ulıwma sheshimin

$$u=F(x_1,x_2,...,x_n)$$

anıq túrde alamız, bunda F- qálegen úzliksiz differenciallanıwshı funkciya.

1-mısal. Teńlemeni sheshiń $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y^2-x^2$

Teńlemege saykes keletuǵın simmetriyalıq túrdegi ápiwayı differenciallıq teńlemeler sistemasın dúzemiz

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{y^2-x^2}.$$

Sistema eki ǵárezsiz baslanǵısh integralǵa iye.

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}\Rightarrow ydy=-xdx\Rightarrow\int ydy=-\int xdx\Rightarrow x^2+y^2=c_1=\psi_1$$

Proporciyalar qásiyetinen paydalanıp, biz tómendegilerdi alamız:

$$\frac{dx+dy}{y-x}=\frac{dz}{y^2-x^2}\Rightarrow(x+y)d(x+y)=dz\Rightarrow\int(x+y)d(x+y)=\int dz\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(x+y)^2}{2}-z=\frac{c_2}{2}\Rightarrow(x+y)^2-2z=c_2=\psi_2$$

Demek, $\Phi\left(x^2+y^2,(x+y)^2-2z\right)=0$ teńlemeniń ulıwma sheshim boladı.

2-mısal. Teńlemeni sheshiń $\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0,$

teńlemeni tómendegishe qayta jazamız

$$\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=-z^2$$

Usı teńlemege saykes keletuǵın simmetriyalıq túrdegi ápiwayı differenciallıq teńlemeler sistemasın dúzemiz

$$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{-z^2}.$$

Proporciyalar qásiyetinen paydalanıp, eki ǵárezsiz baslanǵısh integral alamız.

$$\frac{dx+dy}{(x+y)^2}=-\int\frac{dz}{z^2}\Rightarrow-\frac{1}{x+y}-\frac{1}{z}=-c_1\Rightarrow\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}=c_1=\psi_1$$

$$\frac{dx-dy}{(x-y)^2}=-\frac{dz}{z^2}\Rightarrow-\frac{1}{x-y}-\frac{1}{z}=-c_2\Rightarrow\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}=c_2=\psi_2$$

$\Phi\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z},\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\right)=0$ funksiya teńlemeniń ulıwma sheshimi boladı.

3-mısal. Koshi máselesin sheshiń $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ (9)

$$z=-y \text{ da } x=1 \qquad (10)$$

(9) Teńlemege saykes keletuǵın simmetriyalıq túrdegi ápiwayı differenciallıq teńlemeler sistemasın dúzemiz.

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{0}.$$

Sistemanı sheship, eki ǵárezsiz baslanǵısh integralın alamız $dz=0 \Rightarrow z=c_1=\psi_1$.

$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{z}$ differenciallıq teńlemesine $z=c_1$ almastıramız:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{c_1} \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{c_1} \Rightarrow c_1\ln|x|=y+c_2 \Rightarrow z\ln|x|-y=c_2=\psi_2$$

Demek, $\Phi\left(z, z\ln|x|-y\right)=0$ (9) teńlemeniń ulıwma sheshim boladı.

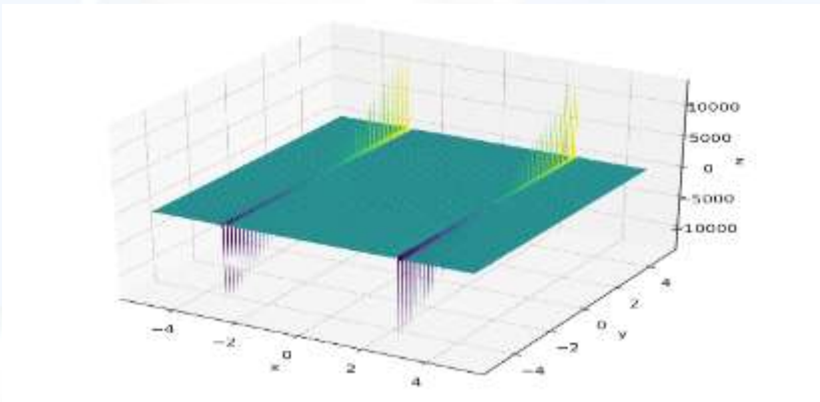
Dáslepki (10) shártti qanaatlandıratuǵın sheshim tawamız.

Baslanǵısh integrallarda $x=1$ ni qabıl etse, tómendegige iye bolamız

$$\begin{cases} z=\overline{\psi_1}, \\ -y=\overline{\psi_2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\overline{\psi_1}, \\ y=-\overline{\psi_2}. \end{cases} \qquad (11)$$

(11) dagi $\overline{\psi_1},\overline{\psi_2}$ ni ψ_1,ψ_2 ga ózgerttirip, nátiyjeni baslanǵısh shártke (1) qoyıp, Koshi máselesiniń kerekli sheshimin tabamız

$$\psi_1=\psi_2 \Rightarrow z=z\ln|x|-y.$$



1-suwret. $z=z\ln|x|-y$ teńlemeniń sheshiminiń beti.

Ádebiyatlar

1. СамарскийА.А., Гулиа Н.В. Квазилинейные уравнения математической физики. -М.: Наука, 1987. -512 с.
2. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1983. - 400 с.