

KIMYO MASALALARINI YECHISHDA MATEMATIKANING AHAMIYATI

Ayimbetova M.W.

Qoraqalpoq davlat universiteti 1-bosqich magistranti
ayimbetovamadinab@gmail.com

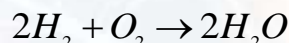
Ilmiy rahbari: Askarova D.B.

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15644026>

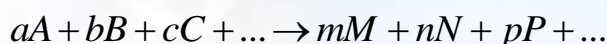
Annotatsiya: Fanning ko'p sonli muammolarini yechish, ko'rib chiqilayotgan hodisani tasvirlovchi noma'lum funksiya va uning hosilalarini o'zaro bog'lab ayniyat bo'lmagan funksiyalarni o'rganishga, ya'ni ba'zi differensial tenglamalarni izlashga va yechishga olib keladi. Bunday muammolardan biri, kimyoviy muammolar bo'lib, ularni differensial tenglamalar yordamida yechish mumkin [1-7].

Kalit so'zlar: differensial tenglama, kimyoviy muammo, kimyoviy reaksiya, modda, molekula, reaksiya, boshlang'ich miqdor, kimyoviy element.

Ba'zi moddalar o'zaro ta'sir qilish jarayonida boshqa moddalar hosil qilishi kimyoviy tenglamalar yordamida ifodalanadi. Masalan,



tenglama ikkita vodorod molekulasini va bitta kislorod molekulasining o'zaro ta'sir qilish jarayonida ikki suv molekulasini hosil bo'lishini ko'rsatadi. Umumiy holda kimyoviy tenglamalar



ko'rinishda yoziladi. Bu yerda A, B, C, \dots lar o'zaro ta'sir qiluvchi moddalarning molekulari, M, N, P, \dots lar kimyoviy reaksiya natijasida hosil bo'ladigan modda molekulari va $a, b, c, \dots, m, n, p, \dots$ lar esa reaksiya davomida qatnashadigan molekular sonini ko'rsatuvchi musbat butun sonlar bo'ladi.

Yangi modda hosil bo'lish tezligi reaksiya tezligi deb ataladi. Reaksiyada qatnashuvchi moddaning harakatdagi massasi yoki konsentratsiyasi bu moddaning bir birlik hajmdagi molekular soni bilan ifodalanadi.

Kimyoviy reaksiya tezligi nazariyasining asosiy qonunlaridan biri shundan iboratki, doimiy haroratda kimyoviy reaksiya tezligi shu vaqtdagi reaksiyada qatnashuvchi moddalarning konsentratsiyalari ko'paytmasiga proporsional bo'lishi sababli, bu harakatdagi massa qonuni deb ataladi.

Agar kimyoviy reaksiya davomida A va B moddalarning o'zaro ta'siri natijasida hosil bo'ladigan C modda miqdori x bo'lsa, unda doimiy harorat va

boshqa ba’zi sharoitlar bajarilganda, reaksiya tezligi $\frac{dx}{dt}$ quyidagilarga proporsional bo’ladi deb hisoblanadi:

1) A modda C moddaga aylanganda, A moddaning qolgan miqdoriga; bu holatda quyidagi differensial tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x), \quad (1)$$

bu yerda a orqali A moddaning boshlang’ich miqdorini, k esa proporsionallik koeffitsientini bildiradi, $k > 0$.

2) A va B moddalar o’zaro ta’siri natijasida hosil bo’ladigan C moddaning miqdori har ikkala moddaning qolgan miqdorlarining ko’paytmasiga proporsional bo’ladi. Bu holatda quyidagi differensial tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \quad (2)$$

bu yerda a va b lar A va B moddalarning boshlang’ich miqdorlari, k esa proporsionallik koeffitsienti hisoblanadi, $k > 0$.

Har ikki holatda x ning t vaqtga bog’liqlikni topamiz. (1) va (2) differensial tenglamalar o’zgaruvchilarni ajratish usuli bilan yechiladi. Har ikkala holatda boshlang’ich shartlar bir xil: $t = 0$ bo’lganda $x = 0$.

Birinchi holatda o’zgaruvchilarni ajratsak

$$\frac{dx}{x - a} = -k dt$$

differensial tenglamani hosil qilamiz, bu tenglamaning umumiy yechimi $x = a + Ce^{-kt}$. Boshlang’ich shartdan $C = -a$ ni topsak biz izlagan yechim $x = a(1 - e^{-kt})$ ko’rinishiga ega bo’ladi. Bu yechimdan $t \rightarrow \infty$ da $x \rightarrow a$ ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinchi holatda o’zgaruvchilarni ajratkandan so’ng quyidagi tenglamaga ega bo’lamiz:

$$\frac{dx}{(x - a)(x - b)} = k dt.$$

Agar bu tenglamada

$$\frac{1}{(x - a)(x - b)} = \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x - b} \right)$$

tenglikni e’tiborga olib integrallasak

$$\frac{1}{b - a} \ln \frac{x - a}{x - b} = -kt + \frac{1}{b - a} \ln C$$

yoki

$$\frac{x-a}{x-b} = Ce^{-k(b-a)t}$$

integralga ega bo'lamiz.

Boshlang'ich sharttan $C = \frac{a}{b}$ ni topsak, unda

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b} e^{-k(b-a)t}$$

bo'lib, bundan

$$x = ab \frac{1 - e^{-k(b-a)t}}{b - ae^{-k(b-a)t}}$$

yechimga ega bo'lamiz.

Mayli $b > a$ bo'lsin deb, yani B moddaning boshlang'ich miqdori A modaning boshlang'ich miqdoridan ortiq bo'lsin deb o'ylayik. Unda olingan yechimdan $t \rightarrow \infty$ da $x \rightarrow a$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar teskarisi $a > b$ bo'lsa deb qarask, unda yuqoridagi tenglikni

$$\frac{x-b}{x-a} = \frac{b}{a} e^{-k(a-b)t}$$

ko'rinishda qayta yozib, bundan $t \rightarrow \infty$ da $x \rightarrow b$ bo'ladi degan xulosaga kelamiz. Bu natijaning yechimini

$$x = ab \frac{e^{-k(a-b)t} - 1}{be^{-k(a-b)t} - a}$$

ko'rinishida yozgandan so'ng ham keltirib chiqarishga bo'ladi.

Misol uchun kimyoviy A elementning yarimi 10 minut ichida kimyoviy B elementiga aylanishi mumkin bo'lsa, unda shu A elementning 0,1 qismi B elementga qancha vaqtda aylanishi aniqlansin.

Masalani quyidagicha yechamiz. Ba'zi kimyoviy reaksiyalar vaqtida reaksiya tezligi reaksiyada ishtirok etayotgan elementlarning konsentratsiyasiga proporsional ekanligi, ya'ni hosil bo'layotgan moddalar miqdorining o'zgarish tezligi dastlabki miqdori a bo'lgan reaksiyada qatnashayotgan moddaning shu vaqt momentidagi $a - y$ miqdoriga proporsional ekanligi ma'lum bo'lsa, unda hosil bo'lgan elementning miqdorini aniqlash masalasi

$$\frac{dy}{dt} = k(a - y)$$

turidagi differensial tenglamani yechishga olib keladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y = a - ce^{-kt} \quad (3)$$

bo'ladi. Endi $t = 0$ boshlang'ich vaqt momentida reaksiya natijasida yangi hosil bo'lgan elementning miqdori nolga teng ekanligini hisobga olsak, ya'ni $y = 0$ bo'lganda, unda (3) dan $0 = a - c$ yoki bundan $c = a$ tengligiga ega bo'lib

$$y = a - ae^{-kt} \quad (4)$$

ko'rinishdagi yechimga ega bo'lamiz.

Endi proporsionallik koeffitsienti k ni aniqlaymiz. Buning uchun qo'shimcha shartlardan foydalanamiz. Shartga ko'ra, $t = 10$ bo'lganda A elementning yarmi B elementga aylanadi, ya'ni $y = \frac{a}{2}$. Unda (4) dan $\frac{a}{2} = a - ae^{-10k}$ bo'lib, bundan

$e^{-k} = 2^{\frac{1}{10}}$ bo'ladi. Buni (4) ga qo'ysak

$$y = a - a \cdot 2^{\frac{t}{10}}$$

bo'ladi. Endi kerakli qiymatni aniqlaymiz, ya'ni t ning qanday qiymatida A moddasining 0,1 qismi B moddaga aylanayotganligini topamiz. Bu qiymatni

aniqlasak $\frac{a}{10} = a - a \cdot 2^{\frac{t}{10}}$ tengligidan

$$t = 10 \cdot \log_2 \frac{10}{9}$$

izlanayotgan vaqt qiymatiga ega bo'lamiz.

Adabiyotlar

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.Наука .1987.
2. Альсевич А.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. Минск. 1990.
3. Ашихмин В.Н. Введение в математическое моделирование / В. Н. Ашихмин, М.Б. Гитман, И.Э.Келлер [и др.]. –М.: Логос, 2005. –440 с.
4. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. –М.: Наука, 1982. –320 с.
5. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. –Минск. 1973. стр. 560.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. Москва. 1987.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. Том 1. Издательство Политехника. 2003.