

## РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

**Базарбаева А.Б.**

магистрантка специальности «Математика» Каракалпакского государственного  
университета имени Бердаха  
[aynurabazarbaeva4@gmail.com](mailto:aynurabazarbaeva4@gmail.com)

**DOI:** <https://doi.org/10.5281/zenodo.15644030>

***Аннотация.** В статье исследуется задача для дифференциального уравнения четвёртого порядка с начальными и граничными условиями. Уравнение сводится к спектральной задаче Штурма–Лиувилля, после чего решение представляется в виде ряда по собственным функциям. Для определения коэффициентов ряда используется метод Лагранжа. Представлен полный аналитический вывод решения, удовлетворяющего заданным условиям. Работа демонстрирует возможности применения спектральных методов для построения точных решений уравнений высокого порядка.*

***Ключевые слова.** уравнение четвёртого порядка, спектральная задача, краевая задача, начальные условия, собственные функции, аналитическое решение, метод Лагранжа, разложение, дифференциальное уравнение.*

Дифференциальные уравнения в частных производных четвёртого порядка широко применяются в различных разделах прикладной математики и теоретической механики, в частности при моделировании изгиба упругих балок, вибрации тонких пластин, распространения волн в неоднородных средах. В связи с этим задачи, содержащие как граничные, так и начальные условия, представляют значительный интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Решение таких задач требует комплексного подхода, включающего методы спектрального анализа, разложения по собственным функциям и применение варьированных начальных условий. Одним из эффективных методов является редукция исходной задачи к спектральной задаче Штурма–Лиувилля, решение которой предоставляет систему ортогональных собственных функций. Эти функции используются в качестве базиса для представления искомого решения в виде разложения по ряду.

Особенностью данной работы является рассмотрение не только граничных условий, но и начальных условий, что требует корректного подхода к определению временных коэффициентов. Для этого применяется метод Лагранжа, позволяющий определить зависимости от времени с учётом условий при начальном моменте времени. Итоговое решение даётся в явном виде, что удобно как для аналитического исследования, так и для возможной численной реализации.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений четвертого порядка изучены многими авторами [1-4]. Классификация уравнений четвертого порядка приведены в работе [5].

В области  $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = f(x,t), \quad (1)$$

$f(x,t)$  – заданная функция.

**Задача 1.** Найти в области  $D$  решение  $u(x,t)$  уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

Решение задачи 1 ищем в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t), \quad (6)$$

где, функции

$$X_k(x) = \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

образуют полную в  $L_2(0,1)$  ортонормированную систему []. Очевидно, что (6) удовлетворяет условиям (2)-(3). Функции  $f(x,t)$  разложим по функциям  $X_k(x)$  в ряд Фурье

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)f_k(t), \quad (8)$$

где

$$f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x,t)X_k(x)dx.$$

Подставляя (6) и (8) в уравнение (1) получим уравнение

$$T_k^{IV}(t) + \lambda_k^4 T_k(t) = f_k(t), \quad (9)$$

Решение уравнения (9) запишется в виде

$$T_k(t) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_k t} + C_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_k t} + C_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_k t + C_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_k t$$

используя здесь условия (4), (5) которые переходят в следующие

$$T_k(0) = T_k(T) = T_k'(0) = T_k''(0) = 0,$$

получим решение в виде

$$T_k(t) = \left( -\frac{1}{4a^3} \int_0^t e^{a\tau} f_k(\tau) d\tau + \frac{2a^2M - f_k(0)}{4a^2} \right) e^{-at} +$$

$$+ \left( -\frac{1}{4a^3} \int_0^t e^{-a\tau} f_k(\tau) d\tau + \frac{-2a^2M - f_k(0)}{4a^2} \right) e^{at} +$$

$$+ \left( -\frac{1}{a^3} \int_0^t f_k(\tau) \sin a\tau d\tau + \frac{1}{2a^2} f_k(0) \right) \cos at + \left( \frac{1}{a^3} \int_0^t f_k(\tau) \cos a\tau d\tau + M \right) \sin at$$

где,

$$M = \frac{2K + \frac{1}{2a^2} f_k(0) (e^{-aT} + e^{aT} - 2\cos aT)}{-e^{aT} + e^{-aT} + 2\sin aT},$$

$$K = \frac{1}{4a^2} \int_0^T e^{(\tau-T)a} f_k(\tau) d\tau - \frac{1}{4a^2} \int_0^T e^{(T-\tau)a} f_k(\tau) d\tau -$$

$$- \cos aT \frac{1}{a^3} \int_0^T f_k(\tau) \sin a\tau d\tau - \sin aT \frac{1}{a^3} \int_0^T f_k(\tau) \cos a\tau d\tau,$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Итак, общее решение запишется в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ -\left( \frac{1}{2a^3} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sh} a(t-\tau) d\tau \right) + \left( \frac{1}{a^3} \int_0^t f_k(\tau) \sin a(t-\tau) d\tau \right) - \right.$$

$$\left. - M \operatorname{sh} at - 4f_k(0) \operatorname{ch} at + \frac{\cos at}{2a^2} f_k(0) + M \sin at \right] \cdot \cos \pi k.$$

#### Использованная литература:

1. Отарова Ж.А. Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнения смешанного типа четвертого порядка. Автореф. дис. ... канд. физ. – мат. наук. – Ташкент: АН РУз, 2009. – 16 с.
2. Бердышев А.С., Кадиркулов Б.Ж. Об одной задаче типа Самарского для параболического уравнения четвертого порядка. Труды научной конф. «Проблемы современной математики» посвященная 20 летию незав. РУз. г. Карши. 22-23 апрель 2011. Стр.84-86.
3. Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2012. – №1. – С. 74-80.
4. Салахитдинов М.С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2005, №3. – С. 72-77.
5. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. ашкент: Фан, 2000. – 144 с.