

POPULYATSIYALARNING MATEMATIK MODELLARI

Maqsadova X.Q.,

“Matematika” ta’lim yo’nalishi 3-bosqich talabasi

husnidamaqsadova@gmail.com

Ilmiy rahbari: Erejepova Sh.K.

Qoraqalpoq davlat universiteti

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15644224>

Annotaciya. Bu maqaloda populyatsiya o'sishining juda oddiy biologik jarayoni ko'rib chiqiladi. Modellashtirishda eng asosiy misol sifatida Maltus tenglamasi ko'rib chiqildi. Maqolada aholining o'sishi yoki kamayishi jarayoni juda murakkab bo'lib, u ob-havo, harorat, kasalliklar va boshqalar kabi ko'plab muhim omillarga bog'liq ekanligi isbotlandi. Qo'yilgan masalaning matematik modeli sifatida oddiy differensial tenglama olinib, matematik usullar yordamida echiladi.

Kalit so'zlar: Modellashtirish, Maltus tenglamasi, populyatsiya, hosila, oddiy differensial tenglamani, Teylor formulasi, Charlz Darvin.

Modellashtirish yondashuvining eng asosiy misoli sifatida *Maltus* tenglamasini korib chiqamiz. Bunda populyatsiya o'sishining juda oddiy biologik jarayoni ko'rib chiqiladi. $N(t)$ - t momentidagi ma'lum bir populyatsiyadagi shaxslar (odamlar) sonini bildirsin. Bunda t o'zgaruvchisi faqat vaqtni bildiradi. Endi biz h qisqa davr oralig'ida aholi soni qanday o'zgarishini hisoblaymiz va biz quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$N(t+h) = N(t) + bhN(t) - dhN(t).$$

Bu yerda biz $t+h$ momentidagi jami aholi sonini t momentidagi umumiy aholi soni va h davrida tug'ilganlar sonidan h davr oralig'ida o'lgan shaxslar sonini olib tashlagan holda topish mumkinligidan foydalanamiz. b va d - mos ravishda jon boshiga tug'ilish va o'lim ko'rsatkichlari (ya'ni, vaqt birligiga mos ravishda bir shaxsga to'g'ri keladigan tug'ilish va o'lim soni). Yuqoridagi tenglikdan biz quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (b-d)N(t).$$

Endi hosila tarifidan foydalansak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{N(t+h) - N(t)}{h},$$

oddiylik uchun b va d ni ham doimiy deb hisoblaymiz va shuning uchun oddiy differensial tenglamani olamiz

$$\frac{dN}{dt} = (b-d)N.$$

Nihoyat, biz bu tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$N' = mN, \quad N(0) = N_0, \quad (1)$$

bu yerda $N(t)$ - t momentidagi aholi soni, $m(m=b-d)$ - model parametri. *Maltus* bu matematik modelga qanday erishdi? Shubhasiz, aholining o'sishi yoki kamayishi jarayoni juda murakkab bo'lib, u ob-havo, harorat, kasalliklar va boshqalar kabi ko'plab muhim omillarga bog'liq. *Maltus* aholining o'sishi "geometrik" degan soddalashtirilgan taxminini aytdi, bu bilan u populyatsiya sonining geometrik progressiya bo'yicha ortib borishini nazarda tutdi, buni $N(t+h) = \omega N(t)$ munosabati sifatida tasvirlash mumkin; Bu erda ω - geometrik o'sish parametri. Uzluksiz vaqt nuqtai nazaridan, bu (1) tenglamani anglatadi. (1)-oddiy differensial tenglamani yecksak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$N(t) = N_0 e^{mt},$$

agar $m > 0$ bo'lsa, eksponensial o'sishni bashorat qiladi. Shu bilan birga, *Maltus* dunyoda tovarlar chiziqli ravishda o'sib borishini ta'kidladi. Aholining eksponensial o'sishi va oziq-ovqatning chiziqli ko'payishi va shunga o'xshash narsalar birgalikda *Maltus* tomonidan falokatni anglatadi. Shunisi qiziqki, aslida *Maltus* xato qilgan. Lekin "qiziqarli" deb ataydigan narsa shundaki, inson populyatsiyasi haqiqatda eksponensial o'sish bashorat qilganidan tezroq o'sgan.

Shuning uchun, *Maltus*ning o'zining matematik modeli (1) va uning echimlari haqidagi talqini aniq noto'g'ri, ammo, hatto shunday oddiy va real bo'lmagan matematik modeldan ham juda uzoqqa cho'zilgan xulosaga kelish mumkin, uni *Charlz Darvin* qilgan, u geometrik (yoki eksponensial) o'sishning asosiy qonunini va cheksiz inson populyatsiyasining aniq mumkin emasligini birlashtirgan. Shunday qilib, hatto juda oddiy modellar ham juda muhim va ahamiyatsiz xulosalarga olib kelishi mumkin!

Agar biz kelajakdagi populyatsiyalar soni bo'yicha bashoratlarni ko'rib chiqmoqchi bo'lsak, hech bir populyatsiyaning cheksizgacha o'sishi mumkin emasligi bizning matematik modellarimizga kiritilishi kerak.

O'sish qonuni umumiy shaklga ega deb taxmin qilishimiz mumkin,

$$N' = NF(N),$$

bu yerda $F(N)$ - N ning etarlicha katta qiymatlari uchun manfiy bo'lishi kerak bo'lgan ba'zi funktsiyadir. Agar bu funktsiya etarlicha silliq bo'lsa, biz uni $N = 0$ atrofida *Taylor formulasi* yordamida ifodalashimiz mumkin:

$$F(N) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} N + \frac{F''(0)}{2!} N^2 + o(N^2).$$

Bu yerda $f(N) = o(g(N))$ yozuvi quyidagini bildiradi:

$$\lim_{N \rightarrow 0} \frac{f(N)}{g(N)} = 0.$$

E'tibor bering, agar *Taylor* formulasida biz faqat doimiy hadni saqlasak, aynan *Maltus* tenglamasini olamiz,

$$N' = mN,$$

bu yerda $m = F(0)$. Agar ikkita shartni saqlasak,

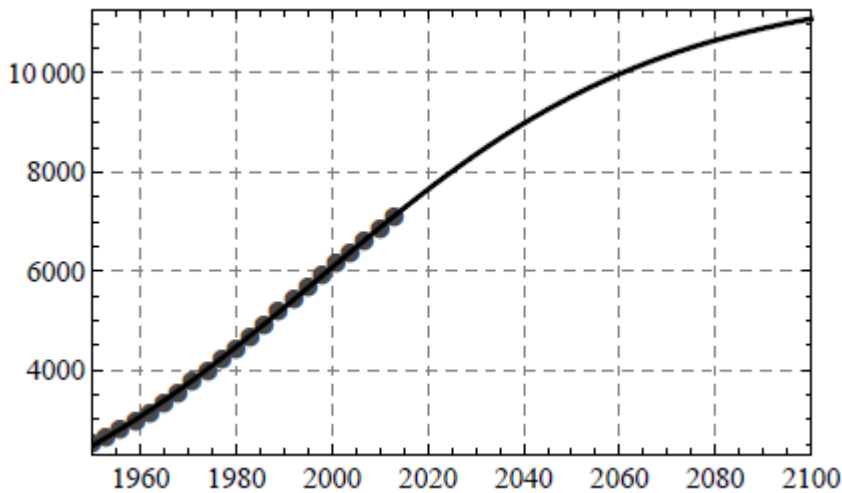
$$N' = NF(N) = N \left(F(0) + F'(0)N \right) = mN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu erda biz boshqa parametrlashdan foydalanamiz, bu logistik tenglama va K parametri yuk tashish qobiliyatidir (Atrof-muhitning yuk tashish qobiliyati - oziq-ovqat, yashash joyi, suv va mavjud boshqa resurslarni hisobga olgan holda, biologik turning o'ziga xos muhit tomonidan qo'llab-quvvatlanishi mumkin bo'lgan maksimal populyatsiya miqdori. Yuk tashish qobiliyati deganda aholi ekologiyasida aholi muvozanatiga mos keladigan muhitning maksimal yuki tushuniladi, bunda populyatsiyadagi o'limlar soni tug'ilganlar soniga (shuningdek, immigratsiya va emigratsiya) teng bo'ladi. Atrof-muhitning yuk tashish qobiliyati resurslarni qazib olish resurslarni qayta tiklash tezligidan yuqori emasligini va hosil bo'lgan chiqindilar atrof-muhitni o'zlashtirish qobiliyatini anglatadi. Yuk tashish qobiliyatining aholi dinamikasiga ta'siri logistik funktsiya bilan modellashtirilgan. Yuk tashish qobiliyati ekologiya, qishloq xo'jaligi va baliqchilikda atrof-muhit qo'llab-quvvatlashi mumkin bo'lgan maksimal aholi soniga nisbatan qo'llaniladi). $N(0) = N_0$ bo'lganida yuqoridagi differensial tenglamaning yechimi

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-mt}} \rightarrow K, t \rightarrow \infty,$$

bo'ladi. Mavjud ma'lumotlardan va eng kichik kvadratlar usulidan foydalanib, logistika egri chizig'ining uchta parametrini baholaymiz va $K = 11740$, ya'ni dunyo aholisi taxminan 12 milliard kishiga barqarorlashishini aniqlay olamiz. Quyidagi rasmda ma'lumotlarning eng yaxshi logistika mosligi bilan taqqoslanishini ko'rishimiz mumkin.

“JASLARDIŃ ILIMDE TUTQAN ORNI” atamasındaǵı XV respublikalıq ilimiy teoriyalıq konferenciya



Yil

So'nggi 65 yil va dunyo aholisining o'sishining eng yaxshi logistik mostligi

Adabiyotlarda juda ko'p turli xil populyatsiya modellari mavjud. Yana bir misol keltirish uchun quyidagi

$$N' = mN \left(1 - \frac{N}{K} - \frac{b}{1 + aN} \right),$$

shaklining modelini ko'rishimiz mumkin. Bu erda odatiy logistik tenglamaga qo'shimcha ravishda boshqa o'lim muddati qo'shiladi va a va b musbat parametrlardir. Bu oxirgi tenglama aslida *Allee ta'siri* ning muhim ekologik hodisasini tavsiflaydi, bunda aholi jon boshiga maksimal o'sish N ning ba'zi bir oraliq qiymatlarida sodir bo'ladi, holbuki N ning katta va kichik qiymatlari uchun u kichikroq yoki hatto manfiy bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Abakumov, A.I., *Upravlenie i optimizatsiya v modelyakh ekspluatiruemykh populyatsii* (Management and Optimization in Exploited Population Models), Vladivostok: Dal'nauka, 1993.
2. Caswell, H., *Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation*, Massachusetts: Sinauer Assoc., 2001.
3. Collie, G., *Analiz populyatsii pozvonochnykh* (Analysis of Vertebrate Populations), Moscow: Mir, 1979.