MITTAG-LEFFLER FUNKCIYALARÍ HÁM OLARDÍŃ BÓLSHEKLI ANALIZ HÁM MATEMATIKALÍQ FIZIKADA QOLLANIWLARI

Koshkarbaeva G.A.
Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti
4-kurs studenti
gulbanukoshkarbaeva3@gmail.com

Otarova Jamila Amanbaevna
j.otarova@mail.ru

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.15644252

Annotatciya. *Bul jumısta Mittag-Leffler funkciyalarınıń tiykarǵı qásiyetleri hám olardıń bólshek tártipli analiz hám matematikalıq fizikadaǵı qollanıwları izertlengen. Mittag-Leffler funkciyaları eksponencial funkciyanıń ulıwmalastırılǵan túri bolıp, bólshek tártipli differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde áhmiyetli orın tutadı. Jumısta bul funkciyalardıń analitikalıq qásiyetleri, bólshek tártipli integral-differencial operatorlar menen baylanısı hám fizikalıq qubılıslardı modellestiriwdegi qollanıw mısalları keltirilgen. Sonday-aq, diffuziya processleri hám relaksaciya qubılısların úyreniwdegi áhmiyeti ayrıqsha kórsetilgen.*

Gilt sózler: *Mittag-Leffler funkciyaları, bólshek tártipli analiz, bólshek tártipli differenciallıq teńlemeler, matematikalıq fizika, diffuziya, relaksaciya processleri.*

Sońǵi on jıllıqlarda bólshek analiz - differenciallaw hám integrallaw qálegen (sonıń ishinde bólshek) tártipte ámelge asırılatuǵın matematikalıq analiz bólimine qızıǵıwshılıqtıń tez ósiwi baqlanbaqta. Bul baǵdar eslew qábileti, násillik hám frakciyalıq strukturaǵa iye quramalı processlerdi matematikalıq modellestiriwde keńnen qollanılmaqta. Bul baǵdardaǵı tiykarǵı analitikalıq qurallardan biri XIX ásir aqırında shved matematigi G. Mittag-Leffler tárepinen birinshi márte kirgizilgen kórsetkishli funkciyanı uliwmalastırıwshı Mittag-Leffler funkciyaları bolıp tabıladı [1-2].

Mittag-Leffler funkciyaları bir qatar ózine tán qásiyetlerge iye [3-4], bul qásiyetler olardı bólshek sanlı differencialliq tenlemelerdiń sheshimlerin táriyiplew ushin ásirese qolaylı etedi. Atap aytqanda, ol Kaputo hám Riman-Luvill bólshek tuwındılı teńlemelerdiń sheshimlerin analitikalıq usılda kórsetiw imkaniyatın beredi. Bir zamatlıq reakciyaga iye bolgan proceslerdi táriyipleytuǵın klassikalıq modellerden parıqlı túrde bólshek modeller tábiyattaǵı kóplegen qubilislar - quramalı ortalıqlardaǵı bólekshelerdiń diffuziyasınan baslap, biologiyalıq toqimalardıń elektr ótkizgishligine shekem tán bolgan eslew effektin esapqa aladı [5].

Házirgi kúnde Mittag-Leffler funkciyalarınan matematikalıq fizikanıń jıllılıq ótkizgishlik, diffuziya, terbelisler hám relaksaciyalardıń ulıwmalasqan teńlemeleri sıyaqlı máselelerinde paydalanıladı. Bunnan tisqarı, olar biomedicina, ekonomika, tutas ortalıqlar mexanikası, elektrodinamika hám basqa pánlerde de qollanıladı [6-7].

e^z-funkciyası pútin tártipli differenciallıq teńlemeler teoriyasında áhmiyetli rol oynaydı. Onıń tómende berilgen bir parametrli ulıwma kórinisi [3]:

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},$$

Mittag-Leffler tárepinen kiritilgen.

Bólshek tártipli differencialliq esapta úlken áhmiyetke iye bolǵan eki parametrli Mittag-Leffler tipindegi funkciya bolsa Agarwal tárepinen kiritilgen [3]. Bul funkciyaǵa baylanıslı bir qansha maǵlıwmatlardı Laplas túrlendiriwi texnikasınan paydalanaıp Gumbert hám Agarwallar kiritken [5].

Eki parametrli Mittag-Leffler funkciyası tómendegi qatar kórinisinde ańlatıladı [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (\alpha>0,\beta>0) \tag{1}$$

Dara jaǵdaylardada (1) formula tómendegi kórinislerge keledi:

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z,$$

$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^z-1}{z},$$

$$E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^z-1-z}{z^2},$$

hám ulıwma jaǵdayda

$$E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right\}.$$

Giperbolalıq sinus hám kosinus funkciyalarıda (1) Mittag-Leffler funkciyasınıń dara jaǵdayı esaplanadı:

$$E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=chz,$$

$$E_{2,2}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{shz}{z}.$$

Mittag-Leffler funkciyası bólshek esaplaw teoriyasında áhmiyetli rol oynaydı, hám kórsetkishli funkciyanıń tábiyiy ulıwmalasıwı bolıp tabıladı. Mittag-Leffler funkciyası bólshek kórinisli teńlemeni sheshiwde qollanıwın qarastıramız.

1-másele. Tómendegi máseleni qarastıramız:

$$D_t^a y(t)+my(t)=f(t),\quad y(0)=0,\quad 0<a<1,\quad f(t)=t^{b-1},$$

bunda $\beta > 0$.

Teńlemeniń eki tárepin túrlendiremiz:

$$s^{\alpha}\tilde{y}(s) - s^{\alpha-1}y(0) + \mu\tilde{y}(s) = \tilde{f}(s)$$

$y(0) = 0$ bolǵanlıqtan

$$(s^{\alpha} + \mu)\tilde{y}(s) = \tilde{f}(s)$$

demek, $\tilde{y}(s) = \dfrac{\tilde{f}(s)}{s^{\alpha} + \mu}$, endi $\tilde{f}(s)$ ti tawamız, $L\{t^{\beta-1}\}(s) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{s^{\beta}}$

bolǵanlıqtan:

$$\tilde{f}(s) = \frac{\Gamma(\beta)}{s^{\beta}};$$

aparıp qoysaq:

$$\tilde{y}(s) = \Gamma(\beta)\frac{1}{s^{\beta}(s^{\alpha} + \mu)};$$

Keri túrlendiremiz:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\beta}(s^{\alpha} + \mu)}\right\}(t) = t^{\beta-1} \cdot E_{\alpha,\beta}(-\mu t^{\alpha})$$

bunda $E_{\alpha,\beta}(z)$ - ulıwmalasqan Mittag-Leffler funkciyası boladı. Demek, sheshim tómendegishe boladı:

$$y(t) = \Gamma(\beta)t^{\beta-1} \cdot E_{\alpha,\beta}(-\mu t^{\alpha})$$

2-másele.

$$D_t^{0,6}y(t) = -5y(t), \quad y(0) = 2$$

$D_t^{\alpha} y = \lambda y$ ushın ulıwma túri $y(t) = y(0)E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$, Onda $y(t) = 2E_{0,6}(-5t^{0,6})$

yamasa $y(t) = E_{0,7}(-3t^{0,7})$ boladı.

3-másele:

$$D_t^{0,5}(t) = t, \quad y(0) = 0.$$

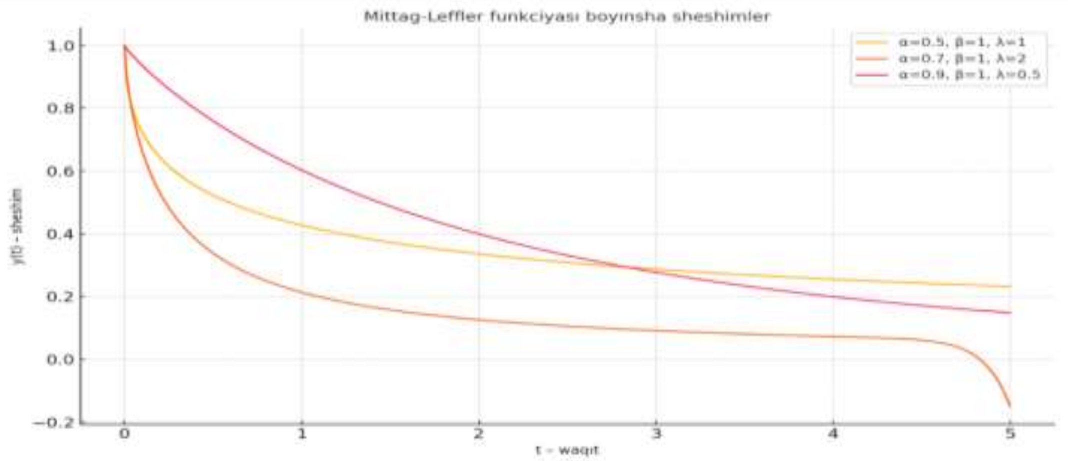
Laplas formulası [2] boyınsha

$$L\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$$

Sonda $\tilde{y}(s) = \dfrac{1}{s^2 \cdot s^{0,5}} = \dfrac{1}{s^{2,5}}$ Keri túrlendiriwden

$$y(t) = \frac{t^{1,5}}{\Gamma(2,5)}$$

onda $G(2,5) = \frac{3\sqrt{p}}{4}$



1-3 máseleler sheshimleriniń grafikleri.

Mittag-Leffler funkciyaları bólshek tártipli teńlemeler teoriyasında kúshli analitikalıq qural bolip tabıladı. Olardıń matematikalıq fizikada qollanılıwı eslew hám miyras qaldırıw effektlerine iye qubılıslardıń keń klasın durıs táriyiplewge múmkinshilik beredi. Zamanagóy izertlewler bul funkciyalardıń qollanılıw shegaraların, sonıń ishinde, sızıqlı emes máseleler, stoxastikalıq processler hám sanlı usıllardı keńeytiwdi dawam ettirmekte.

Ádebiyatlar:

1. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
2. Podlubny, I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
3. Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., Rogosin, S.V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer, 2014.
4. Oldham, K.B., Spanier, J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, 1974.
5. Мухаметзянов, Р.Х., Ситдиков, А.Ф. *Методы решения дробных дифференциальных уравнений*. Казань: Казанский университет, 2011.
6. Килбас, А.А. *Дробное интегро-дифференцирование и его приложения*. Минск: Наука и техника, 1993.
7. Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.