

UDC 517.9

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR YORDAMIDA YECHILADIGAN EKOLOGIK MASALALAR

Reimova L.J..

Qoraqalpoq davlat universiteti
reimovalaura@gmail.com

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15644315>

Annotatsiya: Tirik organizmlar koloniyasi uchun yashashga qulay muhit bor bo'lsin va bu muhitda koloniyadagi organizmlar bilan oziqlanadigan yirtqich hayvonlar bo'lmasin, va oziq-ovqat ta'minoti cheklanmagan bo'lsin deb hisoblaylik. Shunday sharoitda organizmlar koloniyasida tug'ilish, organizmlarning o'lishiga nisbatan ko'proq bo'ladi. Endi, koloniyadagi organizmlar sonining o'sish qonunini aniqlaymiz.

Kalit so'zlar: differensial tenglama, tirik organizmlar, cheklangan muhit, proporsionallik.

Differensial tenglamalar asosiy matematik tushunchalarning biri bo'lib, u qandayda bir hodisani yoki jarayonni o'rganish natijasida olingan ushbu hodisa yoki jarayonning differensial modellari bo'lib hisoblanadi. Odatda differensial modellarni tuzish, o'rganilayotgan hodisaning tabiati bilan bog'liq bo'lgan ilm yo'nalishlaridagi ayrim qonuniyatlarni bilishni talab qiladi[1-9].

Organizmlar soni vaqtning boshlang'ish $t=0$ momentida y_0 ga teng bo'lsin deb faraz qilaylik. Koloniyadagi organizmlar sonining o'zgarish tezligi, organizmlar soniga nisbatan proporsional bo'ladi. Agar proporsionallik koeffitsiyentini α bilan belgilasak, u holda koloniyadagi organizmlar $y(t)$ soni

$$y' = \alpha y \quad (1)$$

differensial tenglamasini qanoatlantirishini ko'ramiz. Ushbu tenglamaning umumiy yechimi $y = Ce^{\alpha t}$ bo'ladi, bu yerda C o'zgarmas son.

Masalaning shartiga ko'ra, agar $t=0$ bo'lsa, u holda $y = y_0$ bo'ladi. Shunday qilib, $C = y_0$ bo'lib, (1) tenglamaning yechimi

$$y = y_0 e^{\alpha t}$$

formulasi bilan ifodalanadi.

Odatda, cheklangan muhitda mavjud turlarning ko'payishi ko'plab muammolarga uchraydi, masalan oziq-ovqat muammolari, yirtqich hayvonlarning bo'lishi va hakoza. Agar tirik organizmlar sonining n marta ko'payishi natijasida kutilmagan to'siqlar soni n^2 ga ko'payadi deb hisoblasak, u holda tirik organizmlar sonining ko'payishiga salbiy ta'sir ko'rsatadigan omillar soni tirik organizmlar sonining kvadratiga proporsionaldir. Shu sababli cheklangan muhitda (1) tenglama o'rniga

$$y' = \alpha y - \beta y^2$$

tenglamasi foydalaniladi. Bu tenglamaning $y(0) = y_0$ shartini qanoatlantiradigan yechimi

$$y = \frac{\alpha \cdot y_0}{\beta \cdot y_0 + (\alpha - \beta \cdot y_0) \cdot e^{-\alpha t}}$$

ko'rinishida aniqlanadi.

Yuqorida keltirilgan masalalarga nisbatan qiziqarli va haqiqatga yaqin bo'lgan natijalarni olish mumkin, agar biz tirik organizmlar koloniyasi bilan birgalikda ular bilan oziqlanadigan yirtqich hayvonlar borligini hisobga olsak, u holda ikkala funktsiyani ko'rib chiqishga to'ri keladi, ya'ni t vaqtda qurbonlar sonini ifodalovchi $y(t)$ va shu vaqtdagi yirtqich hayvonlar sonini ifodalovchi $x(t)$ funktsiyalarini foydalanishga to'g'ri keladi.

Agar yirtqich hayvonlar bo'lmasa, qurbonlar sonining o'sish tezligi ularning soniga proporsional bo'ladi va yirtqich hayvonlarga oziq bo'lgan qurbonlar soni qurbon va yirtqichlar sonining ko'paytmasiga proporsional bo'ladi. Bunday holatda

$$y'(t) = \alpha y - \beta xy$$

(2)

tenglamasiga ega bo'lamiz. Agar ikkita noma'lum $x(t)$ va $y(t)$ funktsiyalar mavjud bo'lsa, u holda (2) tenglamaga qo'shimcha $x(t)$ ning hosilasi qatnashgan tenglama ham kerak bo'ladi. Yirtqich hayvonlar uchun oziq-ovqat qancha ko'p bo'lsa, ular shuncha tez ko'payadi. Shu bilan birga, o'sish tezligi shu vaqtdagi yirtqichlar soniga va yirtqichlarning o'lish soniga proporsional bo'ladi. U holda $x'(t)$ uchun

$$x'(t) = \lambda xy - \delta x$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Shunday qilib, qurbon yirtqich masalasini o'rganish

$$\left. \begin{aligned} y' &= \alpha y - \beta xy \\ x' &= \lambda xy - \delta x \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ko'rinishidagi sistemaga olib keladi. Agar bu sistemada $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $y = \frac{\delta}{\lambda}$ bo'lsa, u holda $x' = 0$; $y' = 0$ bo'ladi, ya'ni qurbonlarning ham, yirtqichlarning har birining o'sish tezligi nolga teng bo'ladi. Bunday holda qurbonlar soni ham, yirtqichlar soni ham o'zgarmaydi. Demak, $M\left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\delta}{\lambda}\right)$ berilgan sistema uchun statsionar hol

bo'lib hisoblanadi. Endi (3) sistemadan x va y ózgaruvchilar orasidagi bog'liqlikni topamiz:

$$y' = \frac{y(\alpha - \beta x)}{x(\gamma y - \delta)}$$

Bu tenglamaning o'zgaruvchilarini ajratib

$$\frac{\gamma y - \delta}{y} y' = \frac{\alpha - \beta x}{x} \quad \text{yoki} \quad \left(\gamma - \frac{\delta}{y} \right) y' = \frac{\alpha}{x} - \beta$$

tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu tenglamani

$$(\gamma y - \delta \ln y)' = (\alpha \ln x - \beta x)'$$

kórinishida yozib, $\ln C$ o'zgarvas qatnashgan

$$\gamma y - \delta \ln y = \alpha \ln x - \beta x + \ln C$$

tenglikka ega bo'lamiz. So'nggi tenglikni soddalashtirib

$$\ln C \cdot x^\alpha \cdot e^{-\beta x} = \ln e^{\gamma y} \cdot y^{-\delta},$$

yoki

$$C \cdot x^\alpha \cdot e^{-\beta x} = y^{-\delta} \cdot e^{\gamma y}$$

kórinishidagi x va y o'zgaruvchilari orasidagi bog'liqlikka ega bo'lamiz.

C o'zgarvas x va y o'zgaruvchilarining boshlang'ich qiymatlari orqali topiladi.

Ushbu masalaning oxirida shuni ta'kidlab o'tish kerakki, (3) sistema hamma vaqt haqiqatni to'liq aks ettiruvchi model bo'la olmaydi, chunki bu modelda faqat ikkita tur ko'rib chiqilgan. Tabiatda har xil turlar ko'p, ular bir-biriga har xil ta'sir qiladi, shu bilan birga berilgan turlar sonining o'zgarishi boshqa tabiiy omillarga ta'sir ko'rsatishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.Наука .1987.
2. Альсевич А.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. Минск. 1990.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. –М.: ИКИ, 2004. –288 с.
4. Гроссман С. Математика для биологов /С.Гроссман, Дж.Тернер. –М.: Высшая школа, 1983. –384 с.
5. Зарипов Ш.Х. Введение в математическую экологию. Казань: Изд-во КФУ, 2010. -47 с.
6. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. –М.: Наука, 1982. –320 с.
7. Менджел М. Динамические модели в экологии поведения/ М. Менджел, К.Кларк. –М.: Мир, 1992. –300 с.
8. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. –Минск.1973. стр. 560.
9. Романов М.Ф., Федоров М.П. Математическое моделирование в экологии. – СПб: Иван Федоров, 2003. –240 с.