КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРВОДНОСТИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Узакбергенова М.Б.
магистрантка специальности «Математика»
Каракалпакского государственного университета имени Бердаха
uzakbergenovamiyassar@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.15644370

Аннотация. *В работе рассматривается параболическое дифференциальное уравнение второго порядка с инволюцией по пространственной переменной. Особенность уравнения заключается в наличии отражённого аргумента во втором производном члене. Построено классическое решение задачи при периодических граничных и нулевом начальном условиях. Проведён спектральный анализ, доказана единственность и устойчивость решения. Результаты применимы к моделированию симметричных физических процессов и могут быть использованы в разработке численных методов.*

Ключевые слова: *уравнение с инволюцией, отражённый аргумент, спектральный метод, параболическое уравнение, классическое решение, граничные условия, симметрия, операторный подход, спектр.*

Дифференциальные уравнения с инволюцией представляют собой важное и активно развивающееся направление в современной математике. Особенность таких уравнений заключается в наличии членов, содержащих функцию или её производные, зависящие от аргумента, преобразованного с помощью инволюции - отображения, обратного самому себе. Наиболее распространённым видом инволюции в прикладных задачах является пространственное отражение. Такие модели адекватно описывают процессы, обладающие зеркальной симметрией или обратной связью, в которой поведение в точке ххх связано с состоянием в точке $-x$ изменяет свойства решений и требует особых методов исследования.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для модифицированного уравнения теплопроводности с инволюцией по пространственной переменной. Введённый инволюционный член $bu_{xx}(-x,t)$, где $|b|<1$, моделирует слабое несимметричное возмущение, нарушающее классическую структуру уравнения.

Такие уравнения изучались многими исследователями, включая Ашыралиева [1], Пржеворску-Ролевич [2] Афтализадех [3], Андреева [4], Гупту[5], Киране [6] и других.

В области $\Omega=\{(x,t):0<t<T,\ -\pi<x<\pi\}$ рассмотрим уравнение

$$u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)+bu_{xx}(-x,t)=f(x,t), \tag{1}$$

где $b-$параметр, $|b|<1$, характеризующий степень возмущения. $f(x,t)-$заданная функция.

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяющее уравнению (1) и условиям

$$u_x(\pi,t)=u_x(-\pi,t), \quad 0\le t\le T,$$
$$u(x,0)=\varphi(x), \quad -\pi\le x\le\pi.$$

Решение задачи строится методом разделения переменных, тогда решение задачи 1, представится в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{2}$$

где, функция $v(x,t)$решение задачи

Задача V. Найти функцию $v(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяющее уравнению

$$v_t(x,t)-v_{xx}(x,t)+bv_{xx}(-x,t)=0,$$

и условиям

$$v_x(\pi,t)=v_x(-\pi,t), \quad 0\le t\le T,$$
$$v(x,0)=\varphi(x), \qquad -\pi\le x\le\pi.$$

Решение задачи запишется в виде ряда

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_{1k}(t)X_{1k}(x)+T_{2k}(t)X_{2k}(x)\right]$$

где функции $X_{1k}(x)$, $X_{2k}(x)$образуют полную ортонормированную систему в $L_2(-\pi,\pi)$

$$\lambda_{1k}=(1-b)\cdot k^2, \qquad \lambda_{2k}=(1+b)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$X_{1k}(x)=\cos kx, \quad k\in N\cup\{0\}. \tag{3}$$

$$X_{2k}(x)=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x, \quad k\in N\cup\{0\}. \tag{4}$$

Решая уравнения однородные уравнения первого порядка

$$T_{1k}'(t)-(1-b)k^2T_{1k}(t)=0,$$

$$T_{2k}'(t)-(1+b)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2T_{2k}(t)=0,$$

решение задачи V, запишется в виде ряда

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi_{1k}e^{(1-b)k^2t}\cos kx+\varphi_{2k}e^{(1+b)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2t}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right], \quad (5)$$

Функция $w(x,t)$ является решением задачи

Задача W. Найти функцию $w(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяющее уравнению

$$w_t(x,t)-w_{xx}(x,t)+bw_{xx}(-x,t)=f(x,t), \quad (6)$$

и условиям

$$w_x(\pi,t)=w_x(-\pi,t), \quad 0\le t\le T,$$

$$w(x,0)=0, \qquad -\pi\le x\le\pi.$$

Решение задачи W ищем в виде

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\omega_{1k}(t)\cos kx+\omega_{2k}(t)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right], \quad (7)$$

разлагая правую часть в ряд по собственным функциям (3) и (4)

$$f(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_{1k}(t)\cos kx+f_{2k}(t)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right], \quad (8)$$

здесь

$$f_{1k}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,t)\cos kxdx,$$

$$f_{2k}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,t)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)dx,$$

подставляя (7) и (8) в уравнение (6), получим два дифференциальных уравнения первого порядка

$$\omega_{1k}'(t)+(1-b)k^2\omega_{1k}(t)=f_{1k}(t),$$

$$\omega_{2k}'(t)+(1+b)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\omega_{2k}(t)=f_{2k}(t).$$

Решая эти уравнения соответственно с условиями $\omega_{1k}(0)=0,\ \omega_{2k}(0)=0,$ имеем

$$\omega_{1k}(t)=\int_0^t f_{1k}(\tau)e^{(b-1)k^2(t-\tau)}d\tau,$$

$$\omega_{2k}(t)=\int_0^t f_{2k}(\tau)e^{-(1+b)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau,$$

тогда решение задачи W запишется в виде ряда

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\int_0^t f_{1k}(\tau)e^{(b-1)k^2(t-\tau)}d\tau\right)X_{1k}(x)+\left(\int_0^t f_{2k}(\tau)e^{-(1+b)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)X_{2k}(x)\right].$$

(9)

Подставляя (5) и (9) в (2) получим решение, задачи 1.

Список использованной литературы:

1. Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2015. – Vol. 2015, No. 284. – P. 1–8.
2. Przeworska-Rolewicz D. Right invertible operators and functional-differential equations with involutions // *Demonstratio Mathematica*. – 1973. – Vol. 5, No. 2. – P. 165–178.
3. Aftabizadeh A.R., Wiener J. Boundary value problems for differential equations with reflection of the argument // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. – 1985. – Vol. 8, No. 1. – P. 151–163.
4. Andreev A.A. Analogs of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument // *Differential Equations*. – 2004. – Vol. 40, No. 8. – P. 1192–1194.
5. Gupta C.P. Two-point boundary value problems involving reflection of the argument // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. – 1987. – Vol. 10, No. 2. – P. 361–371.
6. Al-Salti N., Kirane M., Torebek B.T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. – 2019. – Vol. 48, No. 3. – P. 669–681. – DOI: 10.15672/HJMS.2017.538.