REKURRENT IZBE-IZLIKLER HÁM OLARDÍŃ QOLLANÍWLARÍ

Xaqbergenova N.F.
Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti,
2-kurs studenti nargizahaqbergenova@gmail.com

Ilimiy basshisi: doc. **Otarova J.A.**

DOI: **https://doi.org/10.5281/zenodo.15644378**

Annotaciya. *Bul jumısta rekurrent izbe-izlikler, olardıń túrleri hám qollanıw oblastları úyrenilgen. Izbe-izlikler matematikanıń tiykarǵı túsiniklerinen bolıp, olar arifmetikalıq hám geometriyalıq izbe-izlikler sıyaqlı klassikalıq túrlerden baslap, Fibonachchi hám Lukas izbe-izlikleri sıyaqlı quramalı túrlerge shekem qarap shıǵılǵan. Sonday-aq, izbe-izliklerdiń kompьyuter ilimi, ekonomika, tábiiy ilimler hám injenerlik tarawındaǵı áhmiyetli qollanıwları analiz etilgen. Jumısta rekurrent izbe-izliklerdiń teoriyalıq tiykarları menen birge praktikalıq máselelerdi sheshiwdegi ornı da tolıq bayanlanǵan.*

Gilt sózler: *Rekurrent izbe-izlikler, Fibonachchi, matematikalıq indukciya, jıyındı formulası, generator funkciya, kombinatorika, algoritmler, qaytalanıwshı formulalar.*

Matematika iliminiń uzaq tariyxında izbe-izlik túsinigi ózgeshe orın iyeleydi. Insanlar áyyemgi dáwirlerden baslap túrli nızamlılıqlardı baqlap, olardı sistemalastırıwǵa háreket etken. Usınday nızamlılıqlardıń biri - rekurentlik izbe-izlikler [1].

Rekurentlik izbe-izlik matematikada júdá áhmiyetli orın tutatuǵın túsinik bolıp, hár bir elementi ózinen aldıńǵı elementleri menen belgili bir formula arqalı baylanısqan izbe-izlikti ańlatadı. Bunday izbe-izlikler tek ǵana teoriyalıq matematikada emes, al fizika, ekonomika, kompyuter ilimi hám basqa da kóplegen tábiyiy hám jámiyetlik ilimlerde qollanıladı.

Rekurentlik izbe-izliklerdiń tariyxı áyyemgi grek matematikleriniń miynetlerine barıp taqaladı. Ásirese, Fibonachchi (Leonardo Pizanskiy) óziniń 1202-jılı jazılǵan "Liber Abaci" miynetinde qoyanlardıń kóbeyiwin modellestiriw mısalı arqalı, keyin óz atı menen atalǵan ataqlı izbe-izlikti dúnyaǵa keltirdi [2-3].

Waqıt ótiwi menen rekurentlik izbe-izlikler teoriyası keńeyip, XVII-XIX ásirlerde Ya. Bernulli, L. Eyler, J.L. Lagranj hám P.S. Laplas sıyaqlı ullı matematiklerdiń miynetleri arqalı sistemalı túrde rawajlandırıldı.

Házirgi zamanda rekurentlik izbe-izlikler tek ǵana matematikanıń teoriyalıq bóliminde emes, al informatika, kriptografiya, ekonomika hám finans, tábiyat ilimleri, muzıka teoriyası hám hátteki súnьiy intellekt tarawında da keń qollanılatuǵın quarallardıń birine aylandı.

Rekurentlik izbe-izliklerdiń júdá áhmiyetli ózgesheligi – olardıń ıqshamlılıǵı hám universallıǵı. Bir neshe ǵana shárt penen kóp sanlı elementlerden turatuǵın quramalı izbe-izliklerdi anıqlaw múmkin. Usınday qásiyetleri sebepli, rekurentlik izbe-izlikler tábiyatta hám insan jaratqan dúnyada úlken kólemdegi aqparattı hám processlerdi táriplew ushın keń qollanıladı.

Rekurentlik izbe-izlik - bul izbe-izliktiń hár bir kelesi elementi aldıńǵı bir yamasa bir neshe elementleri arqalı anıqlanatuǵın sanlı $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ izbe-izlik.

Matematikalıq túrde bul tómendegishe jazıladı [4]:

$$a_n = f\left(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_{n-k}\right), \; n \geq k,$$

bunda a_n – izbe-izliktiń n – orınlanıwshısı, f – rekurent funkciya, k – rekurentlik qatnastıń tártibi.

Eń belgili rekurentlik izbe-izliklerdiń biri - Fibonachchi izbe-izligi. Bul izbeizlikte hár bir san ózinen aldıńǵı eki sannıń qosındısına teń:

$$F(0)=0, F(1)=1, \; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \; n \geq 2.$$

Izbe-izbe elementleri: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Arifmetikalıq progressiyada hár bir kelesi element aldıńǵı elementke turaqlı san qosıw arqalı alınadı:

$$a_n = a_{n-1} + d, \text{ bunda } d \text{ – progressiyanıń ayırması.}$$

Geometriyalıq progressiyada hár bir kelesi element aldıńǵı elementti turaqlı sanǵa kóbeytiw arqalı alınadı:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ bunda } q \text{ – progressiyanıń eselewshi.}$$

Rekurentlik izbe-izliklerdiń tómendegi sheshiw usılları bar.

Tikkeley esaplaw. Rekurent formula hám dáslepki shártler berilgen bolsa, izbe-izliktiń elementlerin birme-bir esaplaw múmkin. Biraq bul usıl n úlken bolǵanda qolaysız.

Ulıwma formulanı tabıw. Kóplegen jaǵdaylarda rekurentlik izbe-izbe elementlerin tabıw ushın ayqın formulanı tabıw múmkin. Mısalı, Fibonachchi sanı ushın Bine formulası:

$$F(n) = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \text{ bunda } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \text{ – altın kesim.}$$

Xarakteristikalıq teńleme usılı. Sızıqlı rekurent qatnaslar ushın harakteristikalıq teńleme usılı qollanıladı. Bul usıl sızıqlı rekurent qatnastı differenciallıq teńlemege aylandırıwǵa tiykarlanǵan.

Rekurentlik izbe-izlikler kóplegen tájiriybelik máselelerdi sheshiwde qollanıladı:

1. *Finanslıq esaplawlar:* Bank depozitlerindegi payızlardı esaplaw, investiciya qaytımın modellestiriw.

2. *Populyaciya ósiwin modellestiriw*: Biologiya hám ekologiyada janlı organizmlerdiń sanın boljawda.

3. *Algoritmler analizi:* Kóplegen algoritmlerdiń orınlanıw waqtın analizlewde rekurent qatnaslardan paydalanıladı.

4. *Kombinatorlıq esaplawlar:* Kombinatorika máselelerinde izbe-izliklerdi tabıw.

1-másele (arifmetikalıq ósiw). Jumısshılardıń is haqqı birinshi jil $a_0 = 1000$ bolsın hám hár jili 200 ge kóbeyedi. a_n-formulasın anıqlań.

Sheshim: $a_n = a_{n-1} + 200$, $a_0 = 1000$ bul arifmetikalıq progressiya boladı.

Ulıwma formulası $a_n = 1000 + 200n$.

2-másele (geometriyalıq ósiw). Banktegi amanat $P_0 = 1000000$ sum. Procent stavkası jılına 10%. $n-$jildan keyingi qosındısın tabıń.

Sheshim: $P_n = 1{,}1 \cdot P_{n-1}$, $P_0 = 1000000$

Bul geometriyalıq progressiya $P_n = \dfrac{1000000}{(1{,}1)^n}$.

3-másele (fibonachchi izbe-izligi). $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 0, a_1 = 1$.

Sheshim: $a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$.

$$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bike formulası boyınsha ulıwma sheshimi tómendegishe sheshiledi.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

4-másele. Ekinshi tártipli sızıqlı rekurciya

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},\ a_0 = 2, a_1 = 5; \qquad (1)$$

Sheshim: Bul turaqlı koefficientli sızıqlı birtekli ekinshi tártipli rekurrentli bolıp sheshiledi. Máseleniń sheshimi

$$a_n = r^n, \qquad (2)$$

kórinisinde izleymiz (2) ni (1) shi rekurrentten teńlemege aparıp qoyamız, sonda

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1; r_2 = 2$$

Uliwma sheshimin tómendegishe sheshemiz

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n = A + B \cdot 2^n.$$

Endi baslanǵısh shártlerden paydalanıp A hám B turaqlılardı tabamız:

$$a_0 = A + B = 2$$
$$a_1 = A + 2B = 5$$
$$(A+2B)-(A+B) = 5-2 \Rightarrow \ B = 3;$$
$$A + 3 = 2 \Rightarrow A = -1$$

Demek, $a_n = -1 + 3 \cdot 2^n$.

Rekurentlik izbe-izlikler - matematikanıń mańızlı túsinikleriniń biri bolıp, olar kóplegen matematikalıq hám tájiriybelik máselelerdi sheshiwde qollanıladı. Rekurent qatnaslardı túsiniw hám sheshe alıw matematikanıń basqa da tarawların úyreniwde, sonıń ishinde differenciallıq teńlemeler, analiz hám algebranı meńgeriwde úlken járdem beredi.

Rekurent qatnaslardı izertlew házirgi zaman iliminiń rawajlanıwında da áhmiyetli orın tutadı, sebebi olar kúndelikli turmısta ushırasatuǵın kóplegen qubılıslardı modellestiriwde qollanıladı.

Ádebiyatlar:

1. Грэхем Р. Л. Конкретная математика: основы компьютерной науки / Р. Л. Грэхем Д. Э. Кнут О. Паташник ; пер. с англ. – М. : Вильямс, 2001. – 656 с.
2. Росси, Г. Рекуррентные соотношения и их применение / Г. Росси ; пер. с англ. – М. : Мир, 1971. – 300 с.
3. Кантор И. Л. Курс элементарной математики. Т. 1. Арифметика. Теория чисел / И. Л. Кантор, А. С. Жданов. – М. : Наука, 1985. – 576 с.
4. Линде И. Н. Рекуррентные последовательности и их приложения / И. Н. Линде. – Казань : Казан. ун-т, 2006. – 132 с.